1 Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΧΩΡΟΥ

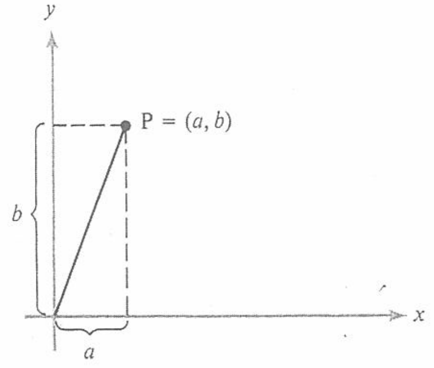
Οι τετράδες ήταν έργο του Hamilton... και αποδείχθηκαν ένα σκέτο βάσανο για όσους τις ακούμπησαν με οποιονδήποτε τρόπο. Το διάνυσμα είναι ένα άχρηστο απομεινάρι τους... και δεν έχει φανεί ποτέ χρήσιμο, έστω και στο παραμικρό, σε κανένα πλάσμα.

Lord Kelvin

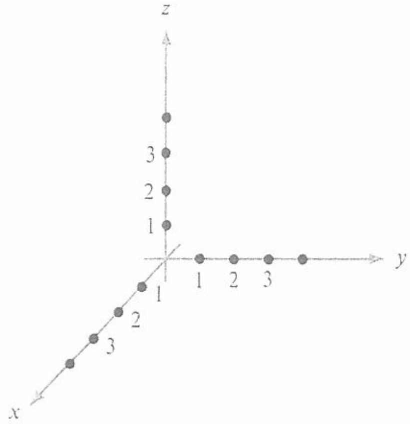
Σ' αυτό το κεφάλαιο μελετάμε τις βασικές πράξεις που αφορούν τα διανύσματα στον τριδιάστατο χώρο: την πρόσθεση διανυσμάτων, τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό, το εσωτερικό και το εξωτερικό γινόμενο. Στην Παράγραφο 1.5 γενικεύουμε μερικές απ' αυτές τις έννοιες στον n-διάστατο χώρο και υπενθυμίζουμε ιδιότητες των πινάκων που θα μας χρειαστούν στα Κεφάλαια 2 και 3.

1.1
Διανύσματα στον Τριδιάστατο Χώρο

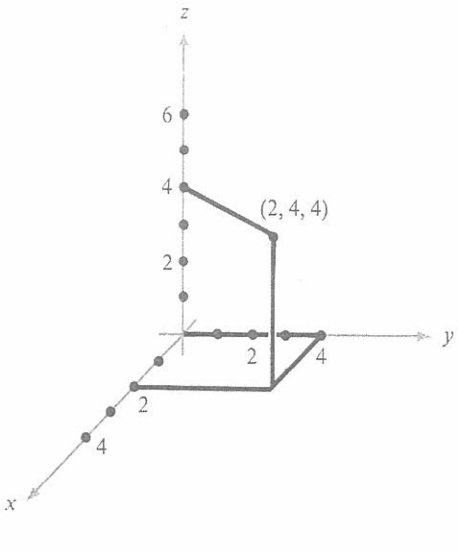
Τα σημεία P του επιπέδου θα παριστάνονται από διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών (a, b)· οι αριθμοί a και b λέγονται *οι Καρτεσιανές συντεταγμένες* του P. Σχεδιάζουμε δύο κάθετες ευθείες, τις οποίες καλούμε άξονα των x και y αντίστοιχα, και φέρουμε τις κάθετες από το P προς τους δύο άξονες, όπως στο Σχήμα 1.1.1. Έχοντας επιλέξει την τομή του άξονα x με τον άξονα y σαν αρχή των αξόνων, καθώς και μοναδιαία μήκη πάνω σ' αυτούς τους άξονες, προσδιορίζουμε δύο κατευθυνόμενες αποστάσεις, a και b, όπως φαίνεται στο σχήμα· ο a λέγεται η *συνιστώσα* x, ενώ ο b η *συνιστώσα* y του P.



Σχήμα 1.1.1 Καρτεσιανές συντεταγμένες στο επίπεδο.



Σχήμα 1.1.2 Καρτεσιανές συντεταγμένες στον χώρο.



Σχήμα 1.1.3 Γεωμετρική αναπαράσταση του σημείου (2, 4, 4) σε Καρτεσιανές συντεταγμένες.

Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να παραστήσουμε τα σημεία του χώρου με διατεταγμένες τριάδες πραγματικών αριθμών. Για να κατασκευάσουμε μια τέτοια αναπαράσταση, διαλέγουμε τρεις, ανά δύο κάθετες ευθείες, που συναντώνται σ' ένα σημείο στον χώρο. Αυτές οι ευθείες ονομάζονται ο άξονας x, ο άξονας y και ο άξονας z, ενώ το σημείο στο οποίο συναντώνται ονομάζεται η *αρχή των αξόνων* (αυτό είναι το σημείο αναφοράς μας). Διαλέγουμε μία κλίμακα πάνω σ' αυτούς τους άξονες. Συχνά αναφερόμαστε σ' αυτό το σύνολο αξόνων με το όνομα *σύστημα συντεταγμένων*, και το σχεδιάζουμε όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1.2.

Σε κάθε σημείο P του χώρου μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μία και μόνο μία (διατεταγμένη) τριάδα πραγματικών αριθμών (a, b, c)· και αντίστροφα, σε κάθε τριάδα μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα και μόνον ένα σημείο στον χώρο, ακριβώς όπως κάναμε και για τα σημεία στο επίπεδο. Ας υποθέσουμε ότι η τριάδα (0, 0, 0) αντιστοιχεί στην αρχή του συστήματος των συντεταγμένων, και ότι τα βέλη πάνω στους άξονες υποδεικνύουν τις θετικές κατευθύνσεις. Τότε, για παράδειγμα, η τριάδα (2, 4, 4) παριστάνει ένα σημείο που απέχει από την αρχή των αξόνων 2 μονάδες στη θετική κατεύθυνση κατά μήκος του άξονα x, 4 μονάδες στη θετική κατεύθυνση κατά μήκος του άξονα y, και 4 μονάδες στη θετική κατεύθυνση κατά μήκος του άξονα z (Σχήμα 1.1.3).

Επειδή είμαστε σε θέση να αντιστοιχούμε σημεία του χώρου με διατεταγμένες τριάδες κατ' αυτόν τον τρόπο, συχνά χρησιμοποιούμε την έκφραση "το σημείο (a, b, c)" αντί για τη μεγαλύτερη φράση "το σημείο P που αντιστοιχεί στην τριάδα (a, b, c)". Αν η τριάδα (a, b, c) παριστάνει το σημείο P, λέμε ότι ο a είναι η συντεταγμένη x (ή η πρώτη συντεταγμένη), ο b είναι η συντεταγμένη y (ή η δεύτερη συντεταγμένη), και ο c είναι η συντεταγμένη z (ή η τρίτη συντεταγμένη) του P. Έχοντας στο μυαλό μας αυτή τη μέθοδο αναπαράστασης σημείων, βλέπουμε ότι ο άξονας x αποτελείται από τα σημεία της μορφής $(a, 0, 0)$ με a οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό· ο άξονας y αποτελείται από τα σημεία $(0, a, 0)$· και ο άξονας z αποτελείται από τα σημεία $(0, 0, a)$. Συνηθίζεται επίσης να συμβολίζουμε τα σημεία του χώρου με τα γράμματα x, y και z στη θέση των a, b και c. Έτσι, η τριάδα (x, y, z) παριστάνει ένα σημείο που έχει σαν πρώτη συντεταγμένη τον x, σαν δεύτερη συντεταγμένη τον y, και σαν τρίτη συντεταγμένη τον z.

Χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα σύμβολα για την ευθεία, το επίπεδο και τον τριδιάστατο χώρο.

(i) Η ευθεία γραμμή συμβολίζεται με $\mathbf{R}^1$ (έτσι, οι $\mathbf{R}$ και $\mathbf{R}^1$ ταυτίζονται).

(ii) Το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (x, y) πραγματικών αριθμών, συμβολίζεται με $\mathbf{R}^2$.

(iii) Το σύνολο όλων των διατεταγμένων τριάδων (x, y, z) πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbf{R}^3$.

Όταν αναφερόμαστε στους $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$ και $\mathbf{R}^3$ ταυτόχρονα, γράφουμε $\mathbf{R}^n$, $n = 1, 2$ ή 3· ή $\mathbf{R}^m$, $m = 1, 2, 3$.

Μπορούμε να επεκτείνουμε την πράξη της πρόσθεσης από τον $\mathbf{R}$ στον $\mathbf{R}^2$ και στον $\mathbf{R}^3$. Για τον $\mathbf{R}^3$, αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:

Αν μας δώσουν δύο τριάδες (x, y, z) και (x', y', z'), ορίζουμε το *άθροισμά* τους με τη σχέση

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z').$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

$$\begin{aligned}(1,1,1) + (2,-3,4) &= (3,-2,5)\\ (x,y,z) + (0,0,0) &= (x,y,z)\\ (1,7,3) + (2,0,6) &= (3,7,9). \quad \square\end{aligned}$$

Το στοιχείο (0, 0, 0) ονομάζεται *το μηδενικό στοιχείο* (ή απλώς *μηδέν*) του $\mathbf{R}^3$. Το στοιχείο $(-x, -y, -z)$ ονομάζεται *αντίστροφο ως προς την πρόσθεση* (ή *αντίθετο*) του (x, y, z), και γράφουμε $(x, y, z) - (x', y', z')$ στη θέση του $(x, y, z) + (-x', -y', -z')$.

Στον $\mathbf{R}^3$ ορίζονται πολύ σημαντικές πράξεις πολλαπλασιασμού. Μία απ' αυτές, το λεγόμενο *εσωτερικό γινόμενο*, αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό σε κάθε ζευγάρι από στοιχεία του $\mathbf{R}^3$. Θα συζητήσουμε λεπτομερειακά το εσωτερικό γινόμενο στην Παράγραφο 1.2. Μία άλλη πράξη πολλαπλασιασμού στον $\mathbf{R}^3$ λέγεται *βαθμωτός πολλαπλασιασμός* (η λέξη "βαθμωτός" είναι συνώνυμη της διατύπωσης "πραγματικός αριθμός"). Αυτό το γινόμενο συνδυάζει πραγματικούς αριθμούς με στοιχεία του $\mathbf{R}^3$ (διατεταγμένες τριάδες) για να δώσει στοιχεία του $\mathbf{R}^3$ ως εξής: αν μας δώσουν ένα βαθμωτό μέγεθος α και μια τριάδα (x, y, z), ορίζουμε το *βαθμωτό** τους *γινόμενο* μέσω της

$$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

$$\begin{aligned}2(4,e,1) &= (2\cdot 4, 2\cdot e, 2\cdot 1) = (8, 2e, 2)\\ 6(1,1,1) &= (6,6,6)\\ 1(x,y,z) &= (x,y,z)\\ 0(x,y,z) &= (0,0,0)\\ (\alpha+\beta)(x,y,z) &= ((\alpha+\beta)x, (\alpha+\beta)y, (\alpha+\beta)z)\\ &= (\alpha x + \beta x, \alpha y + \beta y, \alpha z + \beta z)\\ &= \alpha(x,y,z) + \beta(x,y,z). \quad \square\end{aligned}$$

Από τον τρόπο που ορίστηκαν, έπεται ότι η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός στον $\mathbf{R}^3$ ικανοποιούν τις παρακάτω ταυτότητες:

(i) $(\alpha\beta)(x, y, z) = \alpha[\beta(x, y, z)]$ (προσεταιριστικότητα)

$$\left.\begin{aligned}&\text{(ii) } (\alpha+\beta)(x,y,z) = \alpha(x,y,z) + \beta(x,y,z)\\ &\text{(iii) } \alpha[(x,y,z) + (x',y',z')] = \alpha(x,y,z) + \alpha(x',y',z')\end{aligned}\right\}\ \text{(επιμεριστικότητα)}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{(iv) } \alpha(0,0,0) = (0,0,0)\\ &\text{(v) } 0(x,y,z) = (0,0,0)\end{aligned}\right\}\ \text{(ιδιότητες των μηδενικών στοιχείων)}$$

---

* (Σ.τ.Ε.): Να μην συγχέεται με το **εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων** που εμφανίζεται στη βιβλιογραφία και ως βαθμωτό.

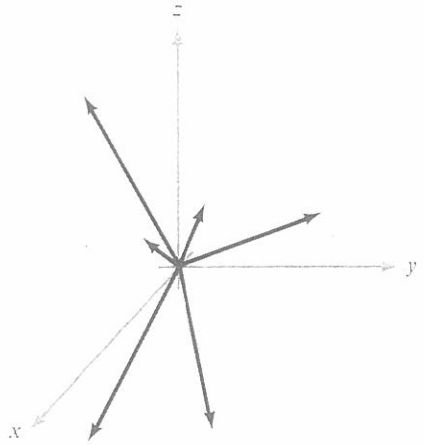
(vi) $1(x, y, z) = (x, y, z)$ (ιδιότητα του μοναδιαίου στοιχείου)

Στον $\mathbf{R}^2$, η πρόσθεση ορίζεται ακριβώς όπως στον $\mathbf{R}^3$, μέσω της

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$

και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ορίζεται μέσω της

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$



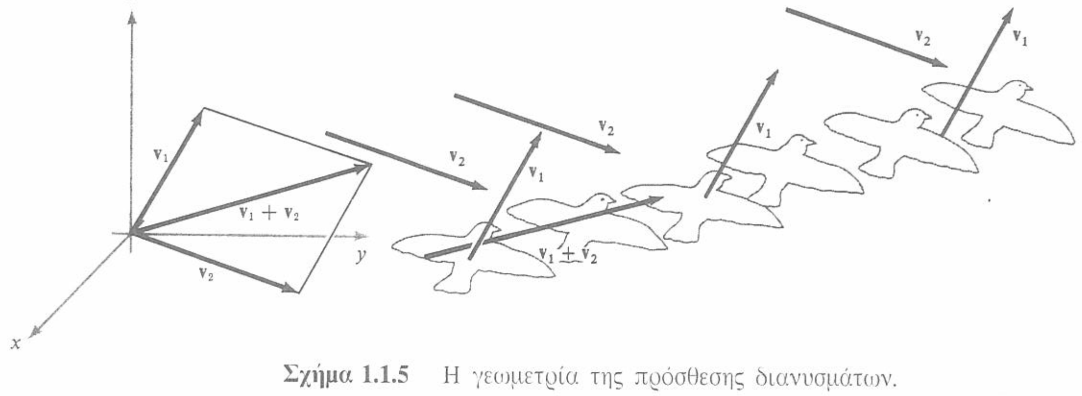
Σχήμα 1.1.4 Γεωμετρικά, σκεφτόμαστε τα διανύσματα σαν βέλη που προέρχονται από την αρχή των αξόνων.

Ας γυρίσουμε πίσω στη γεωμετρία του μοντέλου μας. Ένα από τα πιο αποδοτικά εργαλεία για τα μαθηματικά και τις εφαρμογές τους αποδείχθηκε το *διάνυσμα*. Ορίζουμε σαν (γεωμετρικό) διάνυσμα ένα κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει από την αρχή των αξόνων, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα με καθορισμένο μήκος και κατεύθυνση, και αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων. Εχετε ακούσει πιλότους να λένε "τώρα ακολουθούμε το διάνυσμα προς τον διάδρομο προσγείωσης"; Αναφέρονται στο διάνυσμα που δίνει την κατεύθυνση και την απόσταση του αεροπλάνου από τον διάδρομο προσγείωσης. Περιττό να πούμε, ότι και η κατεύθυνση και η απόσταση έχουν κάποια σημασία στην περίπτωση αυτή. Στο Σχήμα 1.1.4 φαίνονται διάφορα διανύσματα. Μπορούμε λοιπόν να φανταζόμαστε τα διανύσματα σαν βέλη που ξεκινάνε από την αρχή των αξόνων. Γενικά, θα συμβολίζονται με παχειά γράμματα: $\mathbf{v}$.

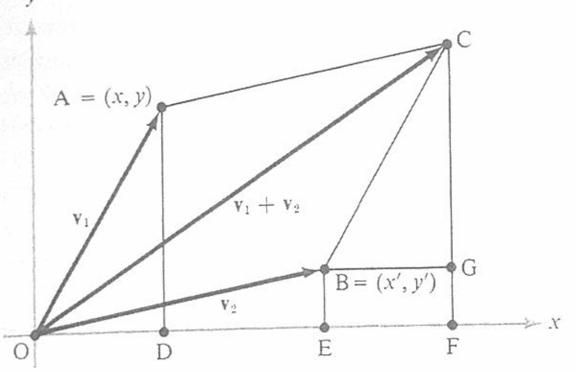
Χρησιμοποιώντας αυτό τον ορισμό του διανύσματος, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε διάνυσμα $\mathbf{v}$ το σημείο του χώρου (x, y, z) στο οποίο καταλήγει το $\mathbf{v}$, και αντίστροφα, σε κάθε σημείο (x, y, z) του χώρου μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διάνυσμα $\mathbf{v}$. Θα ταυτίζουμε λοιπόν το $\mathbf{v}$ με το (x, y, z) και θα γράφουμε $\mathbf{v} = (x, y, z)$. Γι' αυτό το λόγο, τα στοιχεία του $\mathbf{R}^3$ δεν είναι μόνο διατεταγμένες τριάδες πραγματικών αριθμών· ονομάζονται επίσης και διανύσματα. Η τριάδα $(0, 0, 0)$ συμβολίζεται με $\mathbf{0}$.

Λέμε ότι δύο διανύσματα είναι **ίσα** *αν και μόνον αν έχουν την ίδια κατεύθυνση και το ίδιο μέτρο.* Εκφράζουμε αυτή τη συνθήκη αλγεβρικά, λέγοντας ότι αν $\mathbf{v}_1 = (x, y, z)$ και $\mathbf{v}_2 = (x', y', z')$, τότε

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad x = x',\ y = y',\ z = z'.$$



Σχήμα 1.1.5 Η γεωμετρία της πρόσθεσης διανυσμάτων.



Σχήμα 1.1.6 Η κατασκευή στην απόδειξη της $(x, y)+(x', y') = (x+x', y+y')$.

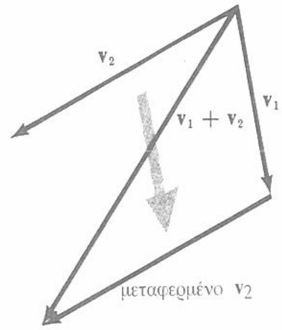
Γεωμετρικά, ορίζουμε την πρόσθεση διανυσμάτων ως εξής: Στο επίπεδο που περιέχει τα διανύσματα $\mathbf{v}_1$ και $\mathbf{v}_2$ (βλέπε Σχήμα 1.1.5), σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο που έχει τα $\mathbf{v}_1$ και $\mathbf{v}_2$ ως προσκείμενες πλευρές. Τότε το άθροισμα $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$ είναι το κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα που ορίζει η διαγώνιος του παραλληλογράμμου. Αυτή η γεωμετρική αντίληψη της πρόσθεσης διανυσμάτων είναι χρήσιμη σε πολλές πραγματικές περιπτώσεις, όπως θα δούμε αργότερα. Ενα εύκολα αντιληπτό παράδειγμα έχετε αν θεωρήσετε ένα πουλί ή ένα αεροπλάνο που πετάει στον αέρα με ταχύτητα $\mathbf{v}_1$, ενώ ο άνεμος έχει ταχύτητα $\mathbf{v}_2$. Η ταχύτητα που βλέπετε στην πράξη είναι $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$.

Για να δείξουμε ότι ο γεωμετρικός ορισμός που δώσαμε για την πρόσθεση είναι συμβιβαστός με τον αλγεβρικό μας ορισμό, πρέπει να βεβαιωθούμε ότι $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2 = (x+x', y+y', z+z')$. Θα αποδείξουμε αυτό το αποτέλεσμα στο επίπεδο, και θα αφήσουμε τον αναγνώστη να διαμορφώσει την αντίστοιχη πρόταση για τον τρισδιάστατο χώρο. Θέλουμε λοιπόν να δείξουμε ότι αν $\mathbf{v}_1 = (x, y)$ και $\mathbf{v}_2 = (x', y')$, τότε $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x + x', y + y')$.

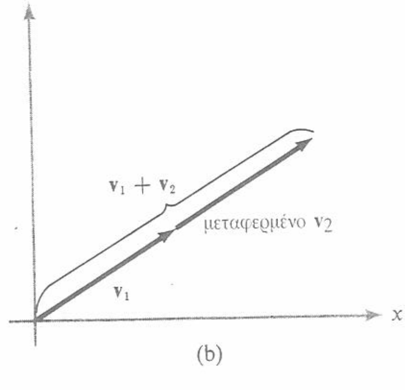
Στο Σχήμα 1.1.6 έστω $\mathbf{v}_1 = (x, y)$ το διάνυσμα που καταλήγει στο σημείο A, και $\mathbf{v}_2 = (x', y')$ το διάνυσμα που καταλήγει στο σημείο B. Από τον ορισμό, το διάνυσμα $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$ καταλήγει στην κορυφή C του παραλληλογράμμου OBCA. Επομένως, για να επαληθεύσουμε ότι $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x + x', y + y')$, αρκεί να δείξουμε ότι οι συντεταγμένες του C είναι $(x + x', y + y')$.

Στο Σχήμα 1.1.6, οι πλευρές των τριγώνων OAD και BCG είναι παράλληλες και οι πλευρές OA και BC έχουν το ίδιο μήκος· γράφουμε λοιπόν OA=BC εννοώντας ακριβώς αυτό. Επομένως, BG=OD και επειδή το BGFE είναι παραλληλόγραμμο, θα είναι και EF=BG. Επιπλέον, OD=x και OE=x'. Άρα, EF=BG=OD=x. Αφού OF=EF+OE, έπεται ότι OF=$x+x'$. Αυτό δείχνει ότι η συντεταγμένη x του C είναι $x + x'$. Η απόδειξη για τη συντεταγμένη y είναι ανάλογη. Με παρόμοια επιχειρήματα για τα άλλα τεταρτημόρια, βλέπουμε ότι ο γεωμετρικός ορισμός της πρόσθεσης διανυσμάτων είναι ισοδύναμος με τον αλγεβρικό ορισμό με βάση τις συντεταγμένες.

Το Σχήμα 1.1.7(a) παρουσιάζει έναν άλλο τρόπο θεώρησης της πρόσθεσης διανυσμάτων: με βάση περισσότερο τα τρίγωνα αντί για τα παραλληλόγραμμα. Δηλαδή, μεταθέτουμε (χωρίς στροφή) το κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα που αναπαριστά το διάνυσμα



(a)



(b)

Σχήμα 1.1.7 (a) Η πρόσθεση διανυσμάτων μπορεί να ιδωθεί με τη βοήθεια τόσο των τριγώνων όσο και των παραλληλογράμμων. Όμως, το τρίγωνο εκφυλίζεται όταν τα $\mathbf{v}_1$ και $\mathbf{v}_2$ είναι συγγραμμικά (b).

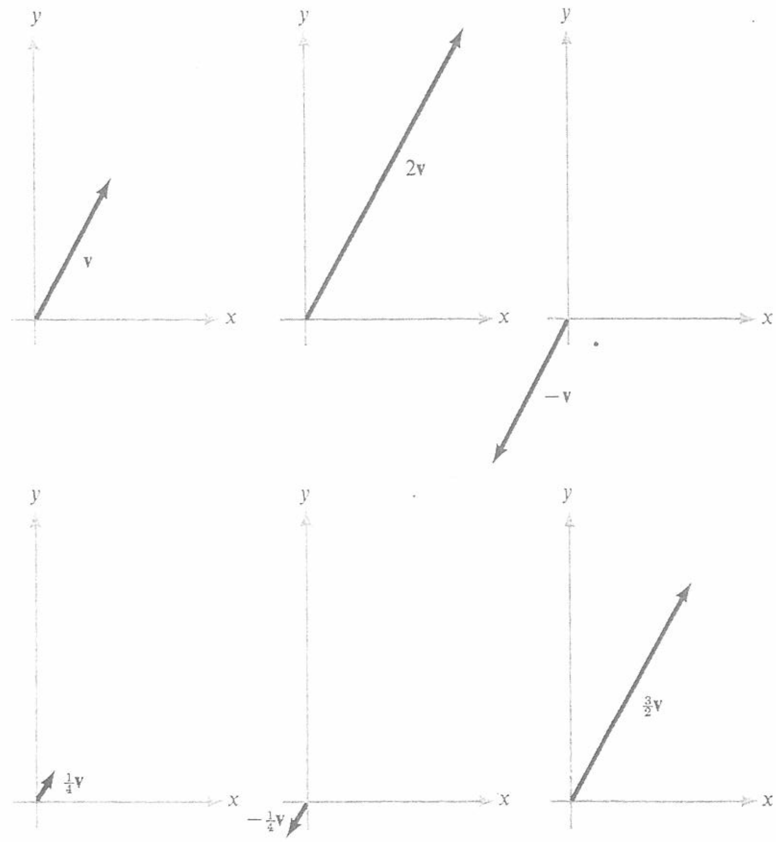
$\mathbf{v}_2$ έτσι ώστε να αρχίζει από το τελικό σημείο του διανύσματος $\mathbf{v}_1$. Το τελικό σημείο του κατευθυνόμενου ευθύγραμμου τμήματος που προκύπτει, είναι το τελικό σημείο του διανύσματος $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Σημειώνουμε ότι όταν τα $\mathbf{v}_1$ και $\mathbf{v}_2$ είναι συγγραμμικά, το τρίγωνο εκφυλίζεται. Αυτή η κατάσταση περιγράφεται στο Σχήμα 1.1.7(b).

Τα αριθμητικά πολλαπλάσια των διανυσμάτων έχουν ανάλογες γεωμετρικές ερμηνείες. Αν α είναι ένας αριθμός και $\mathbf{v}$ ένα διάνυσμα, ορίζουμε σαν $\alpha\mathbf{v}$ το διάνυσμα που έχει μήκος $|\alpha|$ επί το μήκος του $\mathbf{v}$, και την ίδια κατεύθυνση με το $\mathbf{v}$ αν $\alpha > 0$, αλλά την αντίθετη αν $\alpha < 0$. Στο Σχήμα 1.1.8 εμφανίζονται διάφορα παραδείγματα.

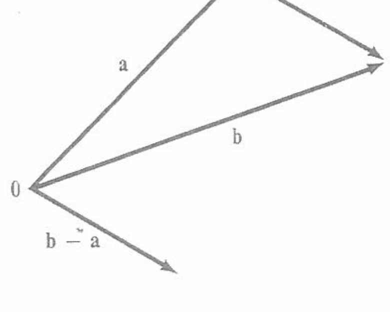
Χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα που βασίζεται στην ομοιότητα τριγώνων, μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν $\mathbf{v} = (x, y, z)$, τότε

$$\alpha\mathbf{v} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$

Δηλαδή, ο γεωμετρικός ορισμός συμπίπτει με τον αλγεβρικό.



Σχήμα 1.1.8 Μερικά αριθμητικά πολλαπλάσια ενός διανύσματος $\mathbf{v}$.



Σχήμα 1.1.9 Η γεωμετρία της αφαίρεσης διανυσμάτων.

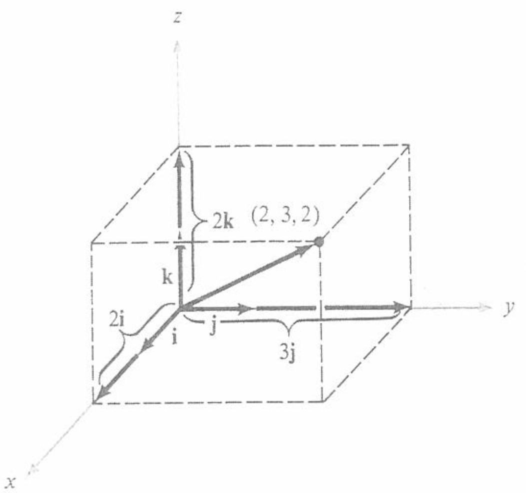
Πώς παριστάνουμε το διάνυσμα $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ γεωμετρικά; Αφού $\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{b}$, το $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ είναι εκείνο το διάνυσμα που, προστιθέμενο στο $\mathbf{a}$, δίνει το $\mathbf{b}$. Έχοντας αυτό υπ' όψιν, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ είναι ένα διάνυσμα παράλληλο, και με το ίδιο μήκος, με το κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα που αρχίζει από το τελικό σημείο του $\mathbf{a}$ και καταλήγει στο τελικό σημείο του $\mathbf{b}$ (βλέπε Σχήμα 1.1.9).

Ας συμβολίσουμε με $\mathbf{i}$ το διάνυσμα που καταλήγει στο $(1, 0, 0)$, με $\mathbf{j}$ το διάνυσμα που καταλήγει στο $(0, 1, 0)$ και με $\mathbf{k}$ το διάνυσμα που καταλήγει στο (0, 0, 1). Με βάση τον ορισμό της πρόσθεσης διανυσμάτων και του αριθμητικού πολλαπλασιασμού, βρίσκουμε ότι αν $\mathbf{v} = (x, y, z)$, τότε

$$\mathbf{v} = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Μπορούμε επομένως να παραστήσουμε οποιοδήποτε διάνυσμα του τρισδιάστατου χώρου με τη βοήθεια των διανυσμάτων **i**, **j** και **k**. Για το λόγο αυτό, τα διανύσματα **i**, **j** και **k** αποκαλούνται *κανονικά βασικά διανύσματα** του $\mathbf{R}^3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Το διάνυσμα που καταλήγει στο (2, 3, 2) είναι το $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, και το διάνυσμα που καταλήγει στο $(0, -1, 4)$ είναι το $-\mathbf{j}+4\mathbf{k}$. Στο Σχήμα 1.1.10 απεικονίζεται το $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$· ο αναγνώστης μπορεί να σχεδιάσει το διάνυσμα $-\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. □



Σχήμα 1.1.10 Αναπαράσταση του (2, 3, 2) συναρτήσει των κανονικών βασικών διανυσμάτων **i, j** και **k**.

Η πρόσθεση και ο αριθμητικός πολλαπλασιασμός μπορούν να γραφούν με χρήση των κανονικών βασικών διανυσμάτων ως εξής:

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) + (x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}) = (x + x')\mathbf{i} + (y + y')\mathbf{j} + (z + z')\mathbf{k}$$

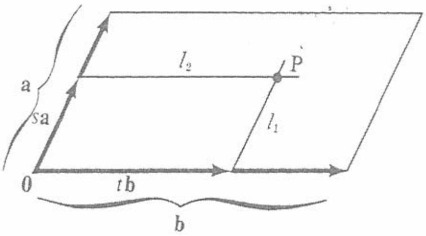
και

$$\alpha(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (\alpha x)\mathbf{i} + (\alpha y)\mathbf{j} + (\alpha z)\mathbf{k}.$$

Λόγω της αντιστοιχίας ανάμεσα σε σημεία και σε διανύσματα, μερικές φορές αναφερόμαστε σε κάποιο σημείο **a** ενώ το **a** μπορεί να έχει οριστεί σαν διάνυσμα. Ο αναγνώστης θά πρέπει τότε να αντιληφθεί ότι γράφοντας κάτι τέτοιο εννοούμε το *τελικό σημείο* του διανύσματος **a**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Περιγράψτε τα σημεία εντός του παραλληλογράμμου που έχει ως προσκείμενες πλευρές τα διανύσματα **a** και **b**.

* (Σ.τ.Ε.) Ή *διανύσματα της κανονικής βάσης* του $\mathbf{R}^3$.



Σχήμα 1.1.11 Περιγραφή των σημείων του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα διανύσματα **a** και **b**.

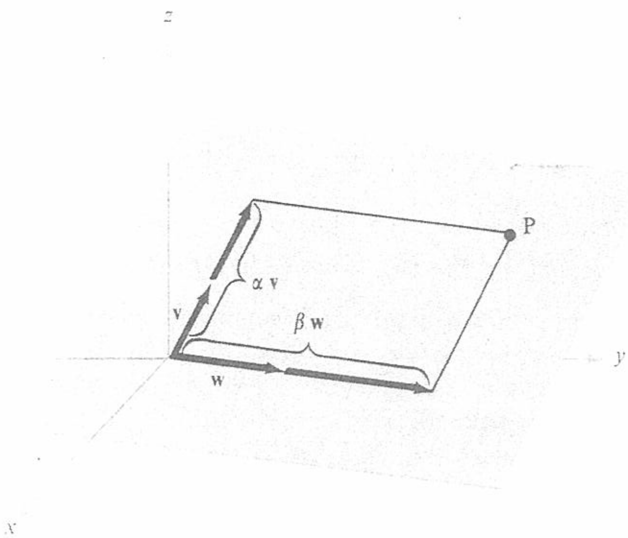
ΛΥΣΗ Θεωρούμε το Σχήμα 1.1.11. Αν P είναι οποιοδήποτε σημείο εντός του δοθέντος παραλληλογράμμου και κατασκευάσουμε ευθείες l_1 και l_2 που να περνάνε από το P και να είναι παράλληλες στα διανύσματα **a** και **b**, αντίστοιχα, βλέπουμε ότι η l_1 τέμνει την πλευρά του παραλληλογράμμου που ορίζεται από το διάνυσμα **b** σε κάποιο σημείο $t\mathbf{b}$, με $0 \leq t \leq 1$. Ομοια, η l_2 τέμνει την πλευρά που ορίζεται από το διάνυσμα **a** σε κάποιο σημείο $s\mathbf{a}$, με $0 \leq s \leq 1$.

Παρατηρούμε ότι P είναι το άκρο της διαγωνίου του παραλληλογράμμου που έχει προσκείμενες πλευρές $s\mathbf{a}$ και $t\mathbf{b}$· επομένως, αν **v** είναι το διάνυσμα με τελικό σημείο το P, βλέπουμε ότι $\mathbf{v} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$. Δηλαδή, όλα τα σημεία εντός του δοθέντος παραλληλογράμμου είναι τα τελικά σημεία διανυσμάτων της μορφής $s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ με $0 \leq s \leq 1$ και $0 \leq t \leq 1$. Αντιστρέφοντας τα βήματά μας βλέπουμε ότι όλα τα διανύσματα αυτής της μορφής καταλήγουν μέσα στο παραλληλόγραμμο. □

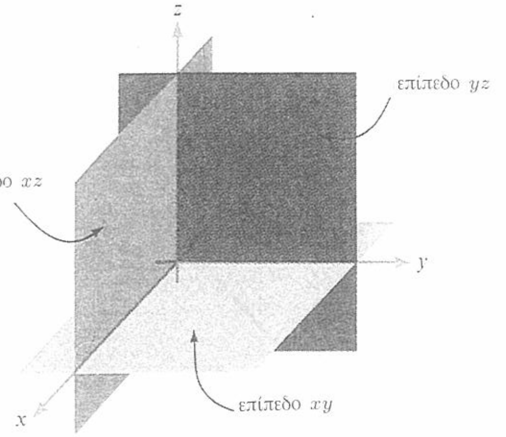
Δεδομένου ότι δύο ευθείες που περνάνε από την αρχή των αξόνων ορίζουν ένα επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων, το ίδιο συμβαίνει και με δύο μη παράλληλα διανύσματα. Αν εφαρμόσουμε τον ίδιο συλλογισμό με αυτόν του Παραδείγματος 4, βλέπουμε ότι το επίπεδο που σχηματίζουν δύο μη παράλληλα διανύσματα **v** και **w** αποτελείται από όλα τα σημεία της μορφής $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$ όπου τα α και β μεταβάλλονται στους πραγματικούς αριθμούς. Παρατηρήστε ότι κάθε σημείο P του επιπέδου που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα θα είναι η απέναντι κορυφή του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα $\alpha\mathbf{v}$ και $\beta\mathbf{w}$, όπου οι α και β είναι κάποιοι πραγματικοί αριθμοί, όπως στο Σχήμα 1.1.12.

Το επίπεδο που ορίζουν τα **v** και **w** λέγεται το επίπεδο που *παράγεται* από τα **v** και **w**. Οταν το **v** είναι αριθμητικό πολλαπλάσιο του **w** και $\mathbf{w} \neq 0$, τότε τα **v** και **w** είναι παράλληλα και το επίπεδο εκφυλίζεται σε ευθεία. Οταν $\mathbf{v}=\mathbf{w}=\mathbf{0}$ (δηλαδή και τα δύο είναι μηδενικά διανύσματα), παίρνουμε ένα και μοναδικό σημείο.

Υπάρχουν τρία ιδιαίτερα επίπεδα που εμφανίζονται με φυσιολογικό τρόπο σε ένα σύστημα συντεταγμένων και θα μας φανούν



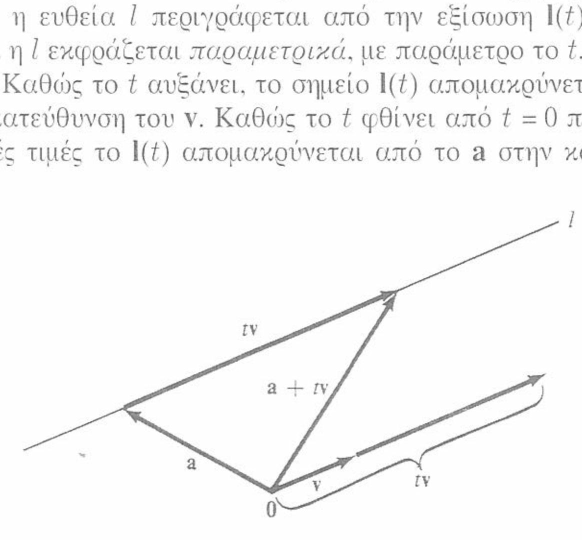
Σχήμα 1.1.12 Περιγραφή των σημείων P του επιπέδου που ορίζεται από τα διανύσματα **v** και **w**.



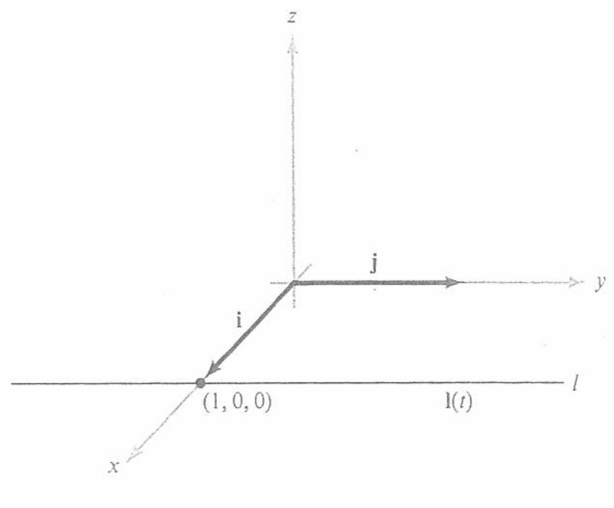
Σχήμα 1.1.13 Τα τρία επίπεδα συντεταγμένων.

χρήσιμα στο μέλλον. Θα ονομάζουμε επίπεδο xy το επίπεδο που παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{i}$ και $\mathbf{j}$, επίπεδο yz το επίπεδο που παράγεται από τα $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$, και επίπεδο xz το επίπεδο που παράγεται από τα $\mathbf{i}$ και $\mathbf{k}$. Αυτά τα επίπεδα απεικονίζονται στο Σχήμα 1.1.13.

Τα επίπεδα και οι ευθείες είναι γεωμετρικά αντικείμενα που μπορούν να παρασταθούν με εξισώσεις. Θα αναβάλουμε μέχρι την Παράγραφο 1.3 τη μελέτη των εξισώσεων που περιγράφουν επίπεδα, χρησιμοποιώντας όμως τη γεωμετρική ερμηνεία της πρόσθεσης διανυσμάτων και του αριθμητικού πολλαπλασιασμού, μπορούμε να βρούμε την *εξίσωση μιας ευθείας l που περνάει από το άκρο του διανύσματος* $\mathbf{a}$ *και έχει τη διεύθυνση ενός διανύσματος* $\mathbf{v}$ (βλέπε Σχήμα 1.1.14). Καθώς το t μεταβάλλεται στους πραγματικούς αριθμούς, τα σημεία της μορφής $t\mathbf{v}$ είναι όλα αριθμητικά πολλαπλάσια του διανύσματος $\mathbf{v}$, και επομένως εξαντλούν τα σημεία της ευθείας που περνάει από την αρχή των αξόνων στη διεύθυνση του $\mathbf{v}$. Αφού κάθε σημείο της l είναι το τελικό σημείο της διαγωνίου ενός παραλληλογράμμου με πλευρές $\mathbf{a}$ και $t\mathbf{v}$ για κάποια πραγματική τιμή του t, βλέπουμε ότι όλα τα σημεία της l είναι της μορφής $\mathbf{a}+t\mathbf{v}$. Δηλαδή, η ευθεία l περιγράφεται από την εξίσωση $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$. Λέμε ότι η l εκφράζεται *παραμετρικά*, με παράμετρο το t. Για $t = 0$, $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a}$. Καθώς το t αυξάνει, το σημείο $\mathbf{l}(t)$ απομακρύνεται από το $\mathbf{a}$ στην κατεύθυνση του $\mathbf{v}$. Καθώς το t φθίνει από $t = 0$ παίρνοντας αρνητικές τιμές το $\mathbf{l}(t)$ απομακρύνεται από το $\mathbf{a}$ στην κατεύθυνση του $-\mathbf{v}$.



Σχήμα 1.1.14 Η ευθεία l, που δίνεται παραμετρικά από την $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a}+t\mathbf{v}$, έχει τη διεύθυνση του $\mathbf{v}$ και περνάει από την κορυφή του $\mathbf{a}$.



Σχήμα 1.1.15 Η ευθεία l περνάει από την κορυφή του **i** στη διεύθυνση του **j**.

Μπορεί να υπάρχουν πολλές *παραμετρικοποιήσεις* της ίδιας ευθείας. Αυτές παίρνονται αν στη θέση του **a** διαλέξουμε ένα διαφορετικό σημείο της δοθείσης ευθείας, και σχηματίσουμε την παραμετρική εξίσωση της ευθείας που ξεκινάει απ' αυτό το σημείο και έχει τη διεύθυνση του **v**. Για παράδειγμα, το άκρο του **a**+**v** ανήκει στην ευθεία $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, επομένως η εξίσωση $\mathbf{l}_1(t) = (\mathbf{a} + \mathbf{v}) + t\mathbf{v}$ παριστάνει την ίδια ευθεία. Μπορούμε να πάρουμε και άλλες παραμετρικοποιήσεις παρατηρώντας ότι αν $\alpha \neq 0$, το διάνυσμα $\alpha\mathbf{v}$ έχει την ίδια (ή την αντίθετη) κατεύθυνση με το **v**. Άρα, η εξίσωση $\mathbf{l}_2(t) = \mathbf{a} + t\alpha\,\mathbf{v}$ δίνει μιαν άλλη παραμετρικοποίηση της $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Προσδιορίστε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το (1, 0, 0) στη διεύθυνση του **j**.

ΛΥΣΗ Η ευθεία που ζητάμε δίνεται από την παραμετρική εξίσωση $\mathbf{l}(t) = \mathbf{j} + t\mathbf{j}$ (Σχήμα 1.1.15). Μιλώντας με συντεταγμένες έχουμε

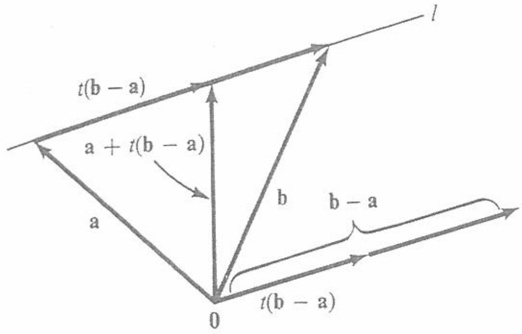
$$\mathbf{l}(t) = (1,0,0) + t(0,1,0) = (1,t,0). \quad \blacksquare$$

Ας προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε την *εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα τελικά σημεία δύο διανυσμάτων* **a** *και* **b**. Αφού το διάνυσμα **b**−**a** είναι παράλληλο στο κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το **a** και τέλος το **b**, αυτό που ζητάμε είναι να υπολογίσουμε την παραμετρική εξίσωση της ευθείας που περνάει από το **a** στη διεύθυνση του **b**−**a** (Σχήμα 1.1.16). Άρα

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})\cdot \qquad \text{δηλαδή,} \qquad \mathbf{l}(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}.$$

Καθώς το t αυξάνει από το 0 ώς το 1, το $t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ ξεκινά σαν το μηδενικό διάνυσμα και αυξάνει σε μήκος (παραμένοντας στη διεύθυνση του **b** − **a**). Άρα, αν $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, καθώς το t αυξάνει από 0 ώς 1, το διάνυσμα $\mathbf{l}(t)$ κινείται από το άκρο του **a** προς το άκρο του **b** κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος **ab**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα $(-1,1,0)$ και $(0,0,1)$ (βλέπε Σχήμα 1.1.17).



Σχήμα 1.1.16 Η ευθεία l, που δίνεται παραμετρικά από την $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b}-\mathbf{a})$, περνάει από τα άκρα των **a** και **b**.

ΛΥΣΗ Αφού τα δοθέντα σημεία παριστάνονται από τα $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ και $\mathbf{b}=\mathbf{k}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{l}(t) &= (1-t)(-\mathbf{i}+\mathbf{j}) + t\mathbf{k}\\ &= -(1-t)\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτής της ευθείας μπορεί λοιπόν να γραφεί στη μορφή

$$\mathbf{l}(t) = (t-1)\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} + t\mathbf{k},$$

ή ισοδύναμα, αν $\mathbf{l}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,

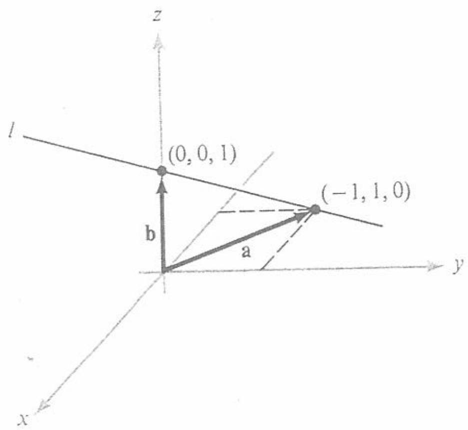
$$x = t-1, \quad y = 1-t, \quad z = t. \ \square$$

Χρησιμοποιώντας συντεταγμένες, *η εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία* (x_1, y_1, z_1) *και* (x_2, y_2, z_2) *είναι*

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

Απαλείφοντας το t, μπορούμε να γράψουμε

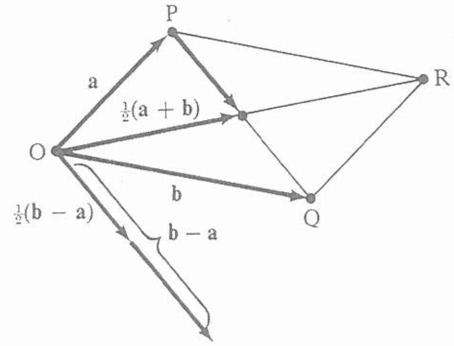
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$



Σχήμα 1.1.17 Ειδική περίπτωση του προηγούμενου σχήματος, όπου $\mathbf{a} = (-1, 1, 0)$ και $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$.

Σημειώνουμε ότι κάθε διάνυσμα της μορφής $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$, όπου $\lambda + \mu = 1$, ανήκει στην *ευθεία που περνά από τα τελικά σημεία των* $\mathbf{a}$ *και* $\mathbf{b}$. Για να το δείτε, παρατηρήστε ότι $\mathbf{c} = (1 - \mu)\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 Χρησιμοποιώντας διανυσματικές μεθόδους, δείξτε ότι οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούν η μία την άλλη.



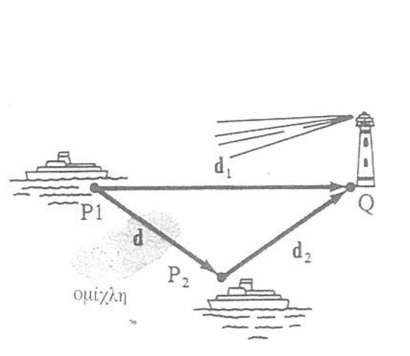
Σχήμα 1.1.18 Οι κατασκευές που χρησιμοποιούμε για να δείξουμε ότι οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούν η μία την άλλη.

ΛΥΣΗ Ας υποθέσουμε ότι οι προσκείμενες πλευρές του παραλληλογράμμου δίνονται από τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1.18. Υπολογίζουμε πρώτα το διάνυσμα που καταλήγει στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος PQ. Αφού το $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ είναι παράλληλο και ισομήκες με το κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα από το P προς το Q, το $(\mathbf{b} - \mathbf{a})/2$ είναι παράλληλο και ισομήκες με το ευθύγραμμο τμήμα από το P προς το μέσο του PQ. Άρα, το διάνυσμα $\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})/2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$ καταλήγει στο μέσο του PQ.

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το διάνυσμα που καταλήγει στο μέσο του OR. Ξέρουμε ότι το $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ καταλήγει στο R· άρα το $(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2$ καταλήγει τόσο στο μέσο του OR όσο και στο μέσο του PQ. Έπεται ότι οι OR και PQ διχοτομούν η μία την άλλη. □

Στρεφόμαστε τώρα σε μερικές εφαρμογές των διανυσμάτων στη Φυσική. Ένα απλό παράδειγμα φυσικής ποσότητας που παριστάνεται από διάνυσμα είναι η μετατόπιση. Ας υποθέσουμε ότι, σ' ένα κομμάτι της επιφάνειας της Γης αρκετά μικρό ώστε να θεωρηθεί επίπεδο, εισάγουμε συντεταγμένες έτσι ώστε ο άξονας x να δείχνει ανατολικά, ο άξονας y να δείχνει βόρεια, και η μονάδα μήκους να είναι το χιλιόμετρο. Αν βρισκόμαστε σε ένα σημείο P και θέλουμε να μετακινηθούμε σε ένα σημείο Q, το *διάνυσμα μετατόπισης* $\mathbf{d}$ που συνδέει το P με το Q μας λέει τη διεύθυνση και την απόσταση που πρέπει να διανύσουμε. Αν x και y είναι οι συνιστώσες αυτού του διανύσματος, η μετατόπιση από το P ώς το Q είναι "x χιλιόμετρα ανατολικά, y χιλιόμετρα βόρεια".

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 Υποθέστε ότι δύο θαλασσοπόροι που δεν μπορούν να δούν ο ένας τον άλλον αλλά μπορούν να επικοινωνήσουν με ασυρμάτους, θέλουν να προσδιορίσουν τη σχετική θέση των πλοίων τους. Εξηγήστε πώς μπορούν να το καταφέρουν αν ο καθένας μπορεί να βρει το διάνυσμα μετατόπισης από τη θέση του προς τον ίδιο φάρο.



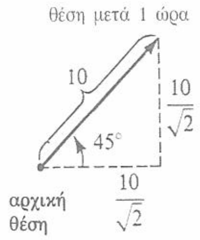
Σχήμα 1.1.19 Με τη χρήση διανυσματικών μεθόδων μπορούμε να εντοπίσουμε αντικείμενα.

ΛΥΣΗ Έστω P_1 και P_2 οι θέσεις των πλοίων, και Q η θέση του φάρου. Η μετατόπιση του φάρου από το i-στό πλοίο δίνεται από το διάνυσμα $\mathbf{d}_i$ που συνδέει το P_i με το Q. Η μετατόπιση του δεύτερου πλοίου από το πρώτο είναι το διάνυσμα $\mathbf{d}$ που συνδέει το P_i με το P_2. Εχουμε $\mathbf{d}+\mathbf{d}_2=\mathbf{d}_1$ (Σχήμα 1.1.19), άρα $\mathbf{d}=\mathbf{d}_1- \mathbf{d}_2$. Δηλαδή, η μετατόπιση του ενός πλοίου από το άλλο είναι η διαφορά των μετατοπίσεων των πλοίων από τον φάρο. □

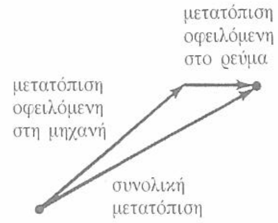
Μπορούμε επίσης να παραστήσουμε την ταχύτητα ενός κινουμένου αντικειμένου με ένα διάνυσμα. Για την ώρα, θα θεωρήσουμε μόνο αντικείμενα που κινούνται με ομοιόμορφη ταχύτητα πάνω σε ευθείες. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι μια βάρκα πλέει σε μια λίμνη με 10 χιλιόμετρα την ώρα (km/h) και κατευθύνεται βορειοανατολικά. Μετά από 1 ώρα ταξιδιού, η μετατόπιση είναι $(10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2}) \approx (7,07,\ 7,07)$· δείτε το Σχήμα 1.1.20.

Το διάνυσμα με συντεταγμένες $(10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2})$ λέγεται *διάνυσμα ταχύτητας* της βάρκας. Γενικά, αν ένα σώμα κινείται με ομοιόμορφη ταχύτητα πάνω σε μια ευθεία, *το διάνυσμα της ταχύτητάς του είναι το διάνυσμα μετατόπισης από τη θέση του κάποια στιγμή ώς τη θέση του 1 μονάδα χρόνου αργότερα.* Αν στη λίμνη εμφανιστεί ένα ρεύμα που κινείται ανατολικά με 2km/h, και η βάρκα εξακολουθεί να κινείται στην ίδια κατεύθυνση, με τη μηχανή της να αναπτύσσει την ίδια ισχύ, η μετατόπιση μετά 1 ώρα θα έχει συντεταγμένες $(2+10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2})$· δείτε το Σχήμα 1.1.21. Επομένως, το νέο διάνυσμα ταχύτητας έχει συντεταγμένες $(2+10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2})$. Σημειώνουμε ότι αυτό είναι το άθροισμα του αρχικού διανύσματος ταχύτητας $(10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2})$ της βάρκας και του διανύσματος ταχύτητας (2, 0) του ρεύματος.

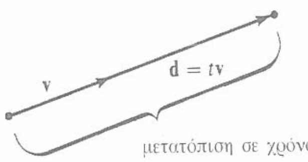
Αν ένα κινητό έχει (σταθερό) διάνυσμα ταχύτητας $\mathbf{v}$, τότε σε t δευτερόλεπτα το διάνυσμα μετατόπισης του κινητού είναι $\mathbf{d}=t\mathbf{v}$· δείτε το Σχήμα 1.1.22.



Σχήμα 1.1.20 Αν ένα σώμα κινείται βορειοανατολικά με ταχύτητα 10 km/h, το διάνυσμα της ταχύτητάς του έχει συντεταγμένες $(10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2})$.



Σχήμα 1.1.21 Η συνολική μετατόπιση είναι το άθροισμα των μετατοπίσεων που οφείλονται στη μηχανή και το ρεύμα.



Σχήμα 1.1.22
Μετατόπιση = χρόνος × ταχύτητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 Ενα πουλί πετάει πάνω σε μια ευθεία με διάνυσμα ταχύτητας $10\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\mathbf{k}$ (σε χιλιόμετρα ανά ώρα). Υποθέτουμε ότι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του στο έδαφος και z είναι το ύψος του πάνω από το έδαφος.

(a) Αν το πουλί βρίσκεται κάποια στιγμή στη θέση (1, 2, 3), πού θα βρίσκεται 1 ώρα μετά; 1 λεπτό μετά;

(b) Πόσα δευτερόλεπτα κάνει το πουλί για ν' ανέβει 10 μέτρα ψηλότερα;

ΛΥΣΗ (a) Το διάνυσμα μετατόπισης από το (1, 2, 3) μετά 1 ώρα είναι το $10\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\mathbf{k}$, άρα η νέα θέση είναι $(1,2,3)+(10,6,1) = (11,8,4)$. Μετά 1 λεπτό, το διάνυσμα μετατόπισης από το (1, 2, 3) είναι $\frac{1}{60}(10\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\mathbf{k}) = \frac{1}{6}\mathbf{i}+\frac{1}{10}\mathbf{j}+\frac{1}{60}\mathbf{k}$, άρα η νέα θέση είναι $(1,2,3)+(\frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{60}) = (\frac{7}{6}, \frac{21}{10}, \frac{181}{60})$.

(b) Μετά t δευτερόλεπτα ($t/3600$ h), το διάνυσμα μετατόπισης από το (1, 2, 3) είναι $(t/3600)(10\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\mathbf{k}) = (t/360)\mathbf{i}+(t/600)\mathbf{j}+(t/3600)\mathbf{k}$. Η αύξηση σε ύψος δίνεται από την συνιστώσα z, $t/3600$. Αυτή θα είναι ίση με 10 m ($=\frac{1}{100}$ km) όταν $t/3600 = \frac{1}{100}$ –δηλαδή όταν $t = 36$ s. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 Οι δυνάμεις στη φύση έχουν μέτρο και διεύθυνση, μπορούν επομένως να παρασταθούν από διανύσματα. Αν πολλές δυνάμεις ασκούνται ταυτόχρονα σε ένα σώμα, η δύναμη που προκύπτει παριστάνεται από το άθροισμα των διανυσμάτων της κάθε δύναμης. Υποθέτουμε ότι οι δυνάμεις $\mathbf{i}+\mathbf{k}$ και $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ασκούνται σε ένα σώμα. Ποιά τρίτη δύναμη πρέπει να ασκηθεί για να εξουδετερωθούν αυτές οι δύο –δηλαδή, για να είναι η συνολική δύναμη ίση με μηδέν;

ΛΥΣΗ Πρέπει να διαλέξουμε τη δύναμη $\mathbf{F}$ έτσι ώστε $(\mathbf{i}+\mathbf{k})+(\mathbf{j}+\mathbf{k})+\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Δηλαδή, $\mathbf{F} = -(\mathbf{i}+\mathbf{k})-(\mathbf{j}+\mathbf{k}) = -\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k}$. (Υπενθυμίζουμε ότι $\mathbf{0}$ είναι το *μηδενικό διάνυσμα*, το διάνυσμα που όλες οι συντεταγμένες του είναι ίσες με μηδέν.)

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Πολλοί επιστήμονες αρνούνταν να χρησιμοποιήσουν τα διανύσματα, προτιμώντας την πιο πολύπλοκη θεωρία των τετράδων (quaternions) μέχρι περίπου το 1900. Το βιβλίο που έκανε δημοφιλείς τις διανυσματικές μεθόδους ήταν η *Διανυσματική Ανάλυση* (Vector Analysis) του E.B. Wilson (ανατύπωση Dover του 1960), το οποίο βασιζόταν σε διαλέξεις του J.W. Gibbs στο Yale στα 1899 και 1900. Ο Wilson παρακολούθησε απρόθυμα τα μαθήματα του Gibbs, γιατί είχε μόλις ολοκληρώσει ένα ετήσιο μάθημα πάνω στις τετράδες στο Harvard με τον J.M. Pierce, έναν τεχνίτη της θεωρίας των τετράδων, υποχρεώθηκε όμως από κάποιον κοσμήτορα να προσθέσει το μάθημα αυτό στο πρόγραμμά του. (Για περισσότερες λεπτομέρειες, βλέπε M.J. Crowe, *A History of Vector Analysis*, University of Notre Dame Press, Notre Dame, Ind., 1967.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Συμπληρώστε τις πράξεις στις Ασκήσεις 1 ώς 6.

1. $(-21, 23) - (;, 6) = (-25, ;)$

2. $3(133, -0.33, 0) + (-399, 0.99, 0) = (;, ;, ;)$

3. $(8a, -2b, 13c) = (52, 12, 11) + \frac{1}{2}(;, ;, ;)$

4. $(2, 3, 5) - 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} = (;, ;, ;)$

5. $800(0.03, 0, 0) = ;\mathbf{i} + ;\mathbf{j} + ;\mathbf{k}$

6. $(3, 4, 5) + (6, 2, -6) = (;, ;, ;)$

7. Ποιούς περιορισμούς πρέπει να βάλουμε στα x, y και z έτσι ώστε η τριάδα (x, y, z) να παριστάνει ένα σημείο στον άξονα y; Στον άξονα z; Στο επίπεδο xz; Στο επίπεδο yz;

8. Σχεδιάστε τα διανύσματα $\mathbf{v} = (2, 3, -6)$ και $\mathbf{w} = (-1, 1, 1)$. Στο σχήμα σας, τοποθετήστε τα $-\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, 2\mathbf{v}$ και $\mathbf{v} - \mathbf{w}$.

9. (a) Γενικεύστε τη γεωμετρική κατασκευή του Σχήματος 1.1.6 για να δείξετε ότι αν $\mathbf{v}_1 = (x, y, z)$ και $\mathbf{v}_2 = (x', y', z')$, τότε $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x + x', y + y', z + z')$.

(b) Χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα βασισμένο στην ομοιότητα τριγώνων, αποδείξτε ότι $\alpha\mathbf{v} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ όταν $\mathbf{v} = (x, y, z)$.

10. Επαναλάβετε την Άσκηση 8, παίρνοντας $\mathbf{v} = (2, 1, 3)$ και $\mathbf{w} = (-2, 0, -1)$.

Στις Ασκήσεις 11 ώς 17, χρησιμοποιήστε συνολοθεωρητικό ή διανυσματικό συμβολισμό ή και τους δύο για να περιγράψετε τα σημεία που ανήκουν στα σχήματα που δίνονται, όπως κάναμε στα Παραδείγματα 4, 5 και 6.

11. Το επίπεδο που παράγεται από τα $\mathbf{v}_1 = (2, 7, 0)$ και $\mathbf{v}_2 = (0, 2, 7)$.

12. Το επίπεδο που παράγεται από τα $\mathbf{v}_1 = (3, -1, 1)$ και $\mathbf{v}_2 = (0, 3, 4)$.

13. Την ευθεία που περνάει από το $(-1, -1, -1)$ στη διεύθυνση του $\mathbf{j}$.

14. Την ευθεία που περνάει από το $(0, 2, 1)$ στη διεύθυνση του $2\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

15. Την ευθεία που περνάει από τα $(-1, -1, -1)$ και $(1, -1, 2)$.

16. Την ευθεία που περνάει από τα $(-5, 0, 4)$ και $(6, -3, 2)$.

17. Το παραλληλόγραμμο με προσκείμενες πλευρές τα διανύσματα $\mathbf{i}+3\mathbf{k}$ και $-2\mathbf{j}$.

18. Βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $x = 3 + 2t, y = 7 + 8t, z = -2 + t$, δηλαδή της $\mathbf{l}(t) = (3 + 2t, 7+8t, -2+t)$, με τα επίπεδα συντεταγμένων.

19. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν σημεία (x, y, z) που να ικανοποιούν την $2x - 3y + z - 2 = 0$ και να ανήκουν στην ευθεία $\mathbf{v} = (2, -2, -1) + t(1, 1, 1)$.

20. Δείξτε ότι κάθε σημείο της ευθείας $\mathbf{v} = (1,-1,2) + t(2,3,1)$ ικανοποιεί την $5x - 3y - z - 6 = 0$.

21. Δείξτε ότι οι διάμεσοι ενός τριγώνου έχουν ένα κοινό σημείο, και ότι αυτό το σημείο χωρίζει κάθε διάμεσο σε δύο μέρη με λόγο 2:1.

Στις Ασκήσεις 22 ώς 24, χρησιμοποιήστε διανυσματικές μεθόδους για να περιγράψετε τα σχήματα που δίνονται:

22. Το παραλληλεπίπεδο με πλευρές **a**, **b** και **c**. (Δείτε το Σχήμα 1.3.5 για μια εικόνα του χωρίου που έχουμε στο μυαλό μας.)

23. Τα σημεία στο εσωτερικό του παραλληλογράμμου που έχει μία κορυφή στο (x_0, y_0, z_0) και τις πλευρές του που ξεκινούν απ' αυτήν την κορυφή με το ίδιο μήκος και την ίδια διεύθυνση με τα διανύσματα **a** και **b**.

24. Το επίπεδο που ορίζεται από τα τρία σημεία $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1)$ και (x_2, y_2, z_2).

25. Ενα πλοίο που βρίσκεται στη θέση (1, 0) ενός ναυτικού χάρτη (με τον βορρά στη θετική κατεύθυνση y) "βλέπει" έναν βράχο στη θέση (2, 4). Ποιό είναι το διάνυσμα που συνδέει το πλοίο με τον βράχο; Ποιά γωνία, θ, σχηματίζει αυτό το διάνυσμα με τη διεύθυνση του βορρά; (Αυτή η γωνία λέγεται *διόπτευση* του βράχου από το πλοίο.)

26. Ας υποθέσουμε ότι το πλοίο της Ασκησης 25 κατευθύνεται προς τον βορρά και ταξιδεύει με ταχύτητα 4 κόμβων σε σχέση με το νερό. Υπάρχει ένα ρεύμα 1 κόμβου κατευθυνόμενο ανατολικά. Οι μονάδες πάνω στον χάρτη είναι ναυτικά μίλια· 1 κόμβος=1 ναυτικό μίλι ανά ώρα.

(a) Αν δεν υπήρχε το ρεύμα, ποιό διάνυσμα **u** θα παρίστανε την ταχύτητα του πλοίου σε σχέση με τον βυθό της θάλασσας;

(b) Αν το πλοίο απλώς ακολουθούσε το ρεύμα, ποιό διάνυσμα **v** θα παρίστανε την ταχύτητά του σε σχέση με τον βυθό της θάλασσας;

(c) Ποιό διάνυσμα **w** παριστάνει τη συνολική ταχύτητα του πλοίου;

(d) Πού θα βρίσκεται το πλοίο μετά 1 ώρα;

(e) Πρέπει ο πλοίαρχος να αλλάξει πορεία;

(f) Τί θα γινόταν αν ο βράχος ήταν παγόβουνο;

27. Ενα αεροπλάνο βρίσκεται στη θέση (3, 4, 5) το μεσημέρι και ταξιδεύει με ταχύτητα $400\mathbf{i}+500\mathbf{j}-\mathbf{k}$ χιλιόμετρα την ώρα. Ο πιλότος εντοπίζει ένα αεροδρόμιο στη θέση (23, 29, 0).

(a) Ποιά χρονική στιγμή το αεροπλάνο θα περάσει ακριβώς πάνω από το αεροδρόμιο; (Υποθέτουμε ότι η Γη είναι επίπεδη και ότι το διάνυσμα **k** δείχνει προς τα πάνω.)

(b) Σε ποιό ύψος θα βρίσκεται το αεροπλάνο όταν θα περάσει πάνω από αυτό;

28. Η ταχύτητα $\mathbf{v}_1$ του ανέμου είναι 40 μίλια την ώρα (mi/h) από τα ανατολικά στα δυτικά καθώς ένα αεροπλάνο πετάει με ταχύτητα αέρος $\mathbf{v}_2$, 100 mi/h προς τον βορρά. Η ταχύτητα του αεροπλάνου σε σχέση με τη γη είναι το διανυσματικό άθροισμα $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

(a) Βρείτε το $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

(b) Κάντε ένα σχήμα με κλίμακα.

29. Μία δύναμη 50 lb σχηματίζει γωνία 50° με την οριζόντια, και δείχνει προς τα δεξιά. Προσδιορίστε την οριζόντια και την κατακόρυφη συνιστώσα της. Παρουσιάστε τα αποτελέσματά σας σε ένα σχήμα.

30. Δύο άνθρωποι τραβούν σε οριζόντια διεύθυνση δύο σχοινιά δεμένα σε μια κολώνα· η γωνία που σχηματίζουν τα σχοινιά είναι 60°. Ο A τραβάει με δύναμη 150 lb, ενώ ο B τραβάει με δύναμη 110 lb.

(a) Η συνολική δύναμη είναι το άθροισμα των δύο δυνάμεων σε ένα κατάλληλα επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων. Κάντε ένα σχήμα που να παριστάνει γραφικά τις τρεις δυνάμεις.

(b) Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρία, βρείτε τύπους για τις συντεταγμένες των δύο δυνάμεων, σε ένα κατάλληλα επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων. Εκτελέστε την αλγεβρική πρόσθεση και βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η συνισταμένη δύναμη με το σχοινί του A.

31. Μια μάζα ενός κιλού (1 kg) που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, είναι κρεμασμένη από σχοινιά δεμένα στα σημεία (1, 1, 1) και (−1, −1, 1). Αν η δύναμη της βαρύτητας έχει την κατεύθυνση του διανύσματος $-\mathbf{k}$, ποιό είναι το διάνυσμα που περιγράφει τη δύναμη (τάση) κατά μήκος καθενός από τα σχοινιά; [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Χρησιμοποιήστε τη συμμετρία του προβλήματος. Μια μάζα 1 kg ζυγίζει 9,8 newtons (N).]

32. Γράψτε τη χημική εξίσωση $CO+H_20=H_2+CO_2$ σαν ισότητα διατεταγμένων τριάδων (C, O, H) και παραστήστε την σχηματικά με ένα διανυσματικό διάγραμμα στον χώρο.

33. (a) Γράψτε τη χημική εξίσωση $pC_3H_4O_3 + qO_2 = rCO_2 + sH_2O$ σαν εξίσωση διατεταγμένων τριάδων με άγνωστους συντελεστές p, q, r και s.
(b) Βρείτε την ελάχιστη θετική ακέραια λύση για τα p, q, r και s.
(c) Παραστήστε σχηματικά τη λύση με ένα διανυσματικό διάγραμμα στον χώρο.

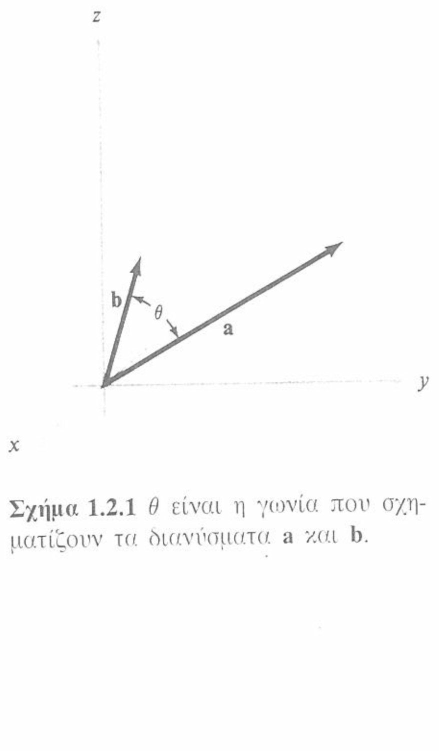
***34.** Βρείτε μια ευθεία που περιέχεται στο σύνολο που ορίζεται από την εξίσωση $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1.2

Το Εσωτερικό Γινόμενο

Σ' αυτή την παράγραφο και στην επόμενη θα συζητήσουμε δύο γινόμενα διανυσμάτων: το εσωτερικό γινόμενο και το εξωτερικό γινόμενο. Είναι και τα δύο πολύ χρήσιμα σε εφαρμογές στη Φυσική και έχουν ενδιαφέρουσες γεωμετρικές ερμηνείες. Το πρώτο γινόμενο με το οποίο θα ασχοληθούμε λέγεται *εσωτερικό γινόμενο.*

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο διανύσματα **a** και **b** στον $\mathbf{R}^3$ (Σχήμα 1.2.1) και θέλουμε να προσδιορίσουμε τη γωνία που σχηματίζουν, δηλαδή τη μικρότερη γωνία που ορίζεται από τα **a** και **b** στο επίπεδο που αυτά παράγουν. Το εσωτερικό γινόμενο μας βοηθάει να το κάνουμε. Ας αναπτύξουμε πρώτα την έννοια τυπικά και θα αποδείξουμε μετά ότι αυτό το γινόμενο μας επιτρέπει να πετύχουμε τον σκοπό μας. Εστω $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Ορίζουμε το *εσωτερικό γινόμενο* των **a** και **b**, και γράφουμε $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, να είναι ο πραγματικός αριθμός



Σχήμα 1.2.1 θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα **a** και **b**.

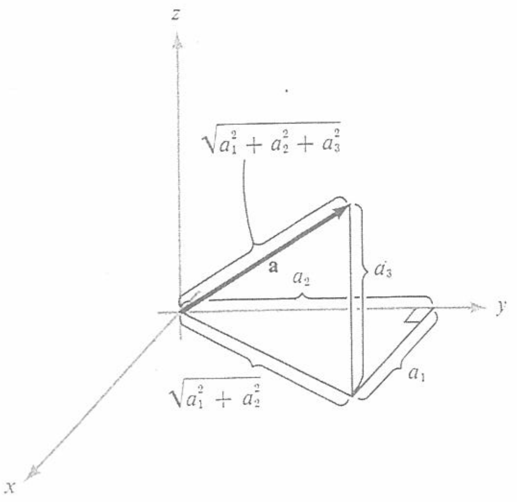
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Προσέξτε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι βαθμωτό μέγεθος. Μερικές φορές το εσωτερικό γινόμενο συμβολίζεται με $< \mathbf{a}, \mathbf{b} >$. Αυτό συχνά γίνεται για τυπογραφικούς λόγους. *Δηλαδή τα* $< \mathbf{a}, \mathbf{b} >$ *και* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ *σημαίνουν το ίδιο ακριβώς πράγμα.*

Από τον ορισμό παίρνουμε άμεσα κάποιες ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου. Αν τα **a**, **b** και **c** είναι διανύσματα στον $\mathbf{R}^3$ και α και β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

(i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$·
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ αν και μόνον αν $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.
(ii) $\alpha\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ και $\mathbf{a} \cdot \beta\mathbf{b} = \beta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.
(iii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ και $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.
(iv) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

Για να αποδείξουμε την πρώτη από αυτές τις ιδιότητες, ας παρατηρήσουμε ότι αν $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, τότε $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Αφού οι a_1, a_2 και a_3 είναι πραγματικοί αριθμοί, ξέρουμε ότι $a_1^2 \geq 0, a_2^2 \geq 0, a_3^2 \geq 0$. Άρα, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$. Επιπλέον, αν $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$, τότε $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, επομένως $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ (μηδενικό διάνυσμα). Οι αποδείξεις των άλλων ιδιοτήτων του εσωτερικού γινομένου είναι εξίσου εύκολες.



Σχήμα 1.2.2 Το μήκος του διανύσματος **a**$= (a_1, a_2, a_3)$ δίνεται από τον Πυθαγόρειο τύπο: $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

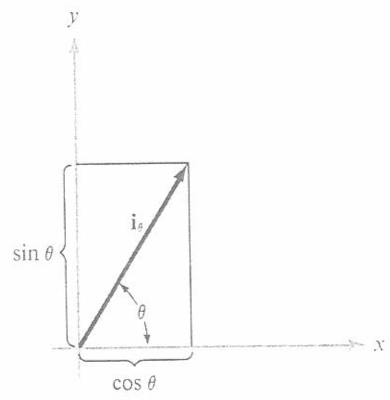
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα συμπεραίνουμε ότι το *μήκος* του διανύσματος $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ είναι $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (δείτε το Σχήμα 1.2.2). Το μήκος του διανύσματος **a** συμβολίζεται με $||\mathbf{a}||$. Αυτό το μέγεθος συχνά λέγεται *νόρμα* του **a**. Αφού $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, έπεται ότι

$$||\mathbf{a}|| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}.$$

Τα διανύσματα που έχουν νόρμα 1 λέγονται *μοναδιαία διανύσματα*. Για παράδειγμα, τα διανύσματα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ είναι μοναδιαία διανύσματα. Παρατηρήστε ότι για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα **a**, το $\mathbf{a}/||\mathbf{a}||$ είναι μοναδιαίο· όταν διαιρούμε το **a** με $||\mathbf{a}||$, λέμε ότι έχουμε *κανονικοποιήσει* το **a**.

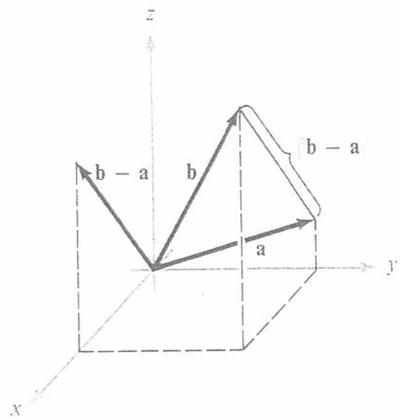
Στο επίπεδο, ας ορίσουμε το διάνυσμα $\mathbf{i}_\theta = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}$, το μοναδιαίο διάνυσμα που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x (βλέπε Σχήμα 1.2.3). Είναι φανερό ότι

$$||\mathbf{i}_\theta|| = (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^{1/2} = 1.$$



Σχήμα 1.2.3 Οι συντεταγμένες του $\mathbf{i}_\theta$ είναι $\cos\theta$ και $\sin\theta$.

Αν **a** και **b** είναι δύο διανύσματα, έχουμε δεί ότι το διάνυσμα $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ είναι παράλληλο και έχει το ίδιο μήκος με το ευθύγραμμο τμήμα από το άκρο του **a** στο άκρο του **b**. Ετσι παίρνουμε ότι η απόσταση από το άκρο του **a** στο άκρο του **b** είναι $||\mathbf{b} - \mathbf{a}||$ (δείτε το Σχήμα 1.2.4).

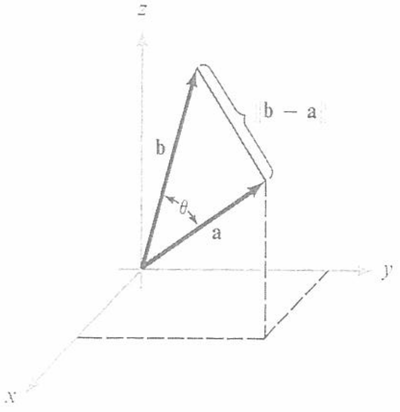


Σχήμα 1.2.4 Η απόσταση ανάμεσα στις κορυφές των **a** και **b** είναι $||\mathbf{b}-\mathbf{a}||$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Βρείτε την απόσταση από το άκρο του διανύσματος **i**, δηλαδή από το σημείο (1, 0, 0), στο άκρο του διανύσματος **j**, (0, 1, 0).

ΛΥΣΗ $||\mathbf{j} - \mathbf{i}|| = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2}$. □

Ας δείξουμε τώρα ότι το εσωτερικό γινόμενο πράγματι μετράει τη γωνία που σχηματίζουν δύο διανύσματα.



Σχήμα 1.2.5 Τα διανύσματα **a**, **b** και η γωνία θ που σχηματίζουν· η γεωμετρία του Θεωρήματος 1 και της απόδειξής του.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Έστω **a** και **b** δύο διανύσματα στον $\mathbf{R}^3$, και $\theta, 0 \leq \theta \leq \pi$, η γωνία που σχηματίζουν (Σχήμα 1.2.5). Τότε

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos\theta.$$

Έτσι μπορούμε να παραστήσουμε τη γωνία που σχηματίζουν τα **a** και **b** σαν

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}\right)$$

αν τα **a** και **b** είναι μη μηδενικά διανύσματα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν εφαρμόσουμε τον γνωστό νόμο των συνημιτόνων της τριγωνομετρίας στο τρίγωνο που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και προσκείμενες πλευρές που καθορίζονται από τα διανύσματα **a** και **b**, παίρνουμε

$$\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

Αφού $\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2 = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$, $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ και $\|\mathbf{b}\|^2 = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$, μπορούμε να ξαναγράψουμε την παραπάνω εξίσωση ως εξής:

$$(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 2\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

Τώρα

$$\begin{aligned}(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) &= \mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) - \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})\\ &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 2\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

Δηλαδή,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|\cos\theta. \quad \blacksquare$$

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι το γινόμενο των μηκών τους επί το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν. Αυτή η σχέση είναι συχνά σημαντική για προβλήματα γεωμετρικής φύσεως.

ΠΟΡΙΣΜΑ (ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ CAUCHY-SCHWARZ) Για κάθε δύο διανύσματα **a** και **b**, έχουμε

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$$

με ισότητα αν και μόνον αν το **a** είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του **b**, ή ένα απ' αυτά είναι το **0**.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν το **a** δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του **b**, τότε $|\cos\theta| < 1$ και ισχύει η ανισότητα. Οταν το **a** είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του **b**, τότε $\theta = 0$ ή π και $|\cos\theta| = 1$. $\blacksquare$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ και $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ (Σχήμα 1.2.6).

ΛΥΣΗ Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1, έχουμε

$$(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}) = \|\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\|\ \|\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}\|\cos\theta$$

άρα

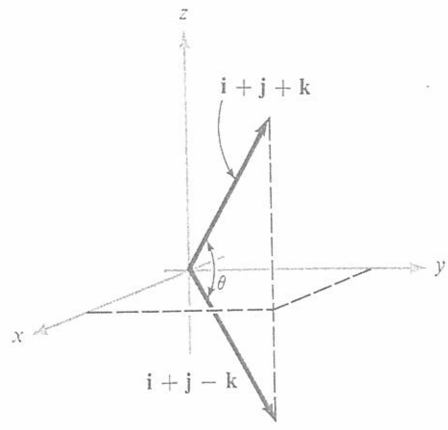
$$1+1-1 = (\sqrt{3})(\sqrt{3})\cos\theta.$$

Δηλαδή,

$$\cos\theta = \tfrac{1}{3}.$$

Επομένως,

$$\theta = \cos^{-1}(\tfrac{1}{3}) \approx 1,23 \text{ rad } (71^\circ). \ \square$$



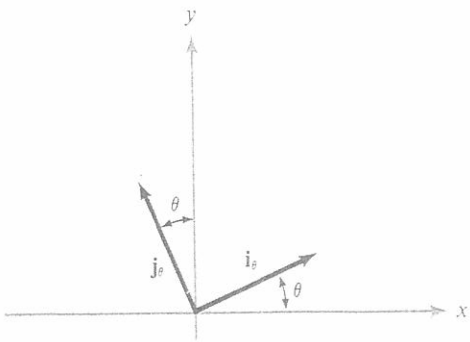
Σχήμα 1.2.6 Βρίσκουμε τη γωνία ανάμεσα στα $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ και $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

Αν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα στον $\mathbf{R}^3$, και θ είναι η γωνία που σχηματίζουν, βλέπουμε ότι $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ αν και μόνον αν $\cos\theta = 0$. Άρα, *το εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων είναι μηδέν αν και μόνον αν τα διανύσματα είναι κάθετα.* Συνεπώς, το εσωτερικό γινόμενο μας παρέχει μία εύχρηστη μέθοδο για να αποφαινόμαστε αν δύο διανύσματα είναι κάθετα. Συχνά λέμε ότι τα κάθετα διανύσματα είναι *ορθογώνια*. Τα κανονικά βασικά διανύσματα $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ είναι ανά δύο ορθογώνια και έχουν μήκος 1· κάθε τέτοιο σύστημα λέγεται *ορθοκανονικό*. Θα υιοθετήσουμε τη σύμβαση ότι το μηδενικό διάνυσμα είναι ορθογώνιο προς όλα τα διανύσματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Τα διανύσματα $\mathbf{i}_\theta = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}$ και $\mathbf{j}_\theta = -(\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j}$ είναι ορθογώνια, αφού

$$\mathbf{i}_\theta\cdot\mathbf{j}_\theta = -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 0$$

(βλέπε Σχήμα 1.2.7). $\square$



Σχήμα 1.2.7 Τα διανύσματα $\mathbf{i}_\theta$ και $\mathbf{j}_\theta$ είναι ορθογώνια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Έστω $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ δύο μη μηδενικά ορθογώνια διανύσματα. Αν $\mathbf{c}$ είναι ένα διάνυσμα του επιπέδου που παράγουν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, τότε υπάρχουν αριθμοί α και β τέτοιοι ώστε $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο, προσδιορίστε τους α και β (βλέπε Σχήμα 1.2.8).

ΛΥΣΗ Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{c}$, έχουμε

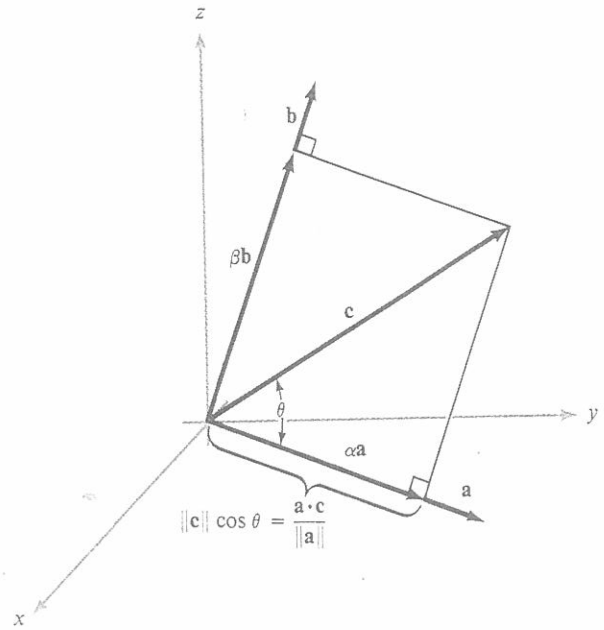
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}.$$

Αφού τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι ορθογώνια, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$, και άρα,

$$\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\|\mathbf{a}\|^2}.$$

Όμοια,

$$\beta = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\|\mathbf{b}\|^2}. \ \square$$



Σχήμα 1.2.8 Πώς βρίσκουμε γεωμετρικά τα α και β όταν $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, όπως στο Παράδειγμα 4.

Σ' αυτό το παράδειγμα, το διάνυσμα $\alpha\mathbf{a}$ λέγεται *προβολή* του **c** στο **a**, και το $\beta\mathbf{b}$ είναι η *προβολή* του στη διεύθυνση του **b**.

Μπορούμε επίσης να καταλήξουμε στο αποτέλεσμα του Παραδείγματος 4 χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική ερμηνεία του εσωτερικού γινομένου. Αν l είναι η απόσταση, μετρημένη πάνω στην ευθεία που προκύπτει με προέκταση του **a**, από την αρχή των αξόνων μέχρι το σημείο όπου η κάθετη από το **c** τέμνει την προέκταση του **a**, έχουμε

$$l = ||\mathbf{c}|| \cos\theta$$

όπου θ η γωνία μεταξύ των **a** και **c**. Επιπλέον, $l = \alpha||\mathbf{a}||$. Αν συνδυάσουμε τα δύο αποτελέσματα, παίρνουμε

$$\alpha||\mathbf{a}|| = ||\mathbf{c}|| \cos\theta, \quad \text{ή} \quad \alpha = \frac{||\mathbf{c}|| \cos\theta}{||\mathbf{a}||} = \frac{||\mathbf{c}||}{||\mathbf{a}||}\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{||\mathbf{c}||\,||\mathbf{a}||}\right) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}.$$

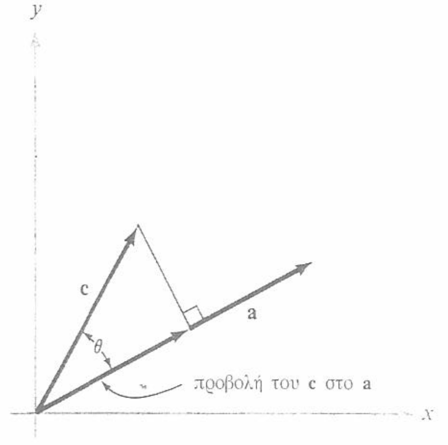
Άρα, *η προβολή του* **c** *στο* **a** *δίνεται από την*

$$\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||^2}\mathbf{a}.$$

Σημειώνουμε ότι το μήκος της προβολής ενός διανύσματος **c** πάνω σ' ένα διάνυσμα **a**, όταν η γωνία μεταξύ των **a** και **c** είναι θ, δίνεται από την

$$||\mathbf{c}||\,|\cos\theta| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}|}{||\mathbf{a}||}$$

(βλέπε Σχήμα 1.2.9).



Σχήμα 1.2.9 Η προβολή του **c** στο **a** είναι $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}/||\mathbf{a}||^2)\mathbf{a}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. (a) Αποδείξτε τις ιδιότητες (ii) και (iii) του εσωτερικού γινομένου.
(b) Αποδείξτε ότι $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$.

2. Υπολογίστε το $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ όπου $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$.

3. Βρείτε τη γωνία μεταξύ των $7\mathbf{j} + 19\mathbf{k}$ και $-2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ (σε ακέραιες μοίρες).

4. Υπολογίστε το $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, όταν $\mathbf{u} = \sqrt{3}\mathbf{i} - 315\mathbf{j} + 22\mathbf{k}$ και $\mathbf{v} = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$.

5. Είναι η παράσταση $\|8\mathbf{i} - 12\mathbf{k}\|\cdot\|6\mathbf{j} + \mathbf{k}\| - |(8\mathbf{i} - 12\mathbf{k})\cdot(6\mathbf{j} + \mathbf{k})|$ ίση με μηδέν; Εξηγήστε.

Στις Ασκήσεις 6 ώς 11 υπολογίστε τα $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ *και* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ *για τα διανύσματα του* $\mathbf{R}^3$ *που δίνονται κάθε φορά.*

6. $\mathbf{u} = 15\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \pi\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

7. $\mathbf{u} = \mathbf{j} - \mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{j} + \mathbf{i}$

8. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

9. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

10. $\mathbf{u} = -\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = 4\mathbf{j}$

11. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

12. Κανονικοποιήστε τα διανύσματα στις Ασκήσεις 6 ώς 8.

13. Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα των Ασκήσεων 9 ώς 11. Αν δεν γίνεται αλλιώς, διατυπώστε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας την $\cos^{-1}$.

14. Βρείτε την προβολή του $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ πάνω στο $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

15. Βρείτε την προβολή του $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ πάνω στο $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

16. Για ποιές τιμές του b το διάνυσμα $2\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ είναι ορθογώνιο προς το (a) $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, και (b) $\mathbf{k}$;

17. Βρείτε δύο μη παράλληλα διανύσματα ορθογώνια και τα δύο προς το $(1, 1, 1)$.

18. Βρείτε την ευθεία που περνάει από το $(3, 1, -2)$ και τέμνει υπό ορθή γωνία την ευθεία $x = -1 + t, y = -2 + t, z = -1 + t$. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Αν (x_0, y_0, z_0) είναι το σημείο τομής, βρείτε τις συντεταγμένες του.]

19. Υποθέτουμε ότι μία δύναμη $\mathbf{F}$ (για παράδειγμα, η βαρύτητα) ασκείται με κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα κάτω σε ένα αντικείμενο που βρίσκεται πάνω σε ένα επίπεδο που σχηματίζει γωνία $45°$ με την οριζόντια διεύθυνση. Εκφράστε τη δύναμη αυτή σαν άθροισμα μιας δύναμης που δρα παράλληλα προς το επίπεδο και μιας που δρα κάθετα σ' αυτό.

20. Υποθέτουμε ότι μια δύναμη που δίνεται από το διάνυσμα $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ασκείται σε ένα αντικείμενο που κινείται στην κατεύθυνση $\mathbf{i}+\mathbf{j}$. Εκφράστε αυτή τη δύναμη σαν άθροισμα μιας δύναμης που έχει την κατεύθυνση της κίνησης και μιας δύναμης που είναι κάθετη στην κατεύθυνση της κίνησης.

21. Μια δύναμη 6 N (newtons) σχηματίζει γωνία $\pi/4$ με τον άξονα y, δείχνοντας προς τα δεξιά. Η δύναμη αντιτίθεται στην κίνηση ενός αντικειμένου κατά μήκος της ευθείας που συνδέει το $(1, 2)$ με το $(5, 4)$.
(a) Βρείτε έναν τύπο για το διάνυσμα-δύναμη $\mathbf{F}$.
(b) Βρείτε τη γωνία, θ, που σχηματίζουν το διάνυσμα της κατεύθυνσης της κίνησης $\mathbf{D} = (5 - 1)\mathbf{i} + (4 - 2)\mathbf{j}$ και η κατεύθυνση της δύναμης $\mathbf{F}$.
(c) Το *έργο* που παράγεται είναι $\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}$, ή ισοδύναμα, $\|\mathbf{F}\|\cdot\|\mathbf{D}\|\cos\theta$. Υπολογίστε το έργο και από τους δύο τύπους και κάνετε τη σύγκριση.

***22.** Ενα υγρό ρέει διαμέσου μιας επίπεδης επιφάνειας με ομοιόμορφη διανυσματική ταχύτητα $\mathbf{v}$. Εστω $\mathbf{n}$ ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια. Δείξτε ότι $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ είναι ο όγκος του υγρού που περνάει μέσα από μοναδιαία επιφάνεια του επιπέδου στη μονάδα του χρόνου.

1.3
Το Εξωτερικό Γινόμενο

Στην Παράγραφο 1.2 ορίσαμε ένα γινόμενο διανυσμάτων που ήταν βαθμωτό. Σ' αυτή την παράγραφο θα ορίσουμε ένα γινόμενο διανυσμάτων που είναι διάνυσμα· δηλαδή, θα δείξουμε με ποιόν τρόπο, αν μας δώσουν δύο διανύσματα **a** και **b**, μπορούμε να παράγουμε ένα τρίτο διάνυσμα $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, που λέγεται *εξωτερικό γινόμενο* των **a** και **b**. Αυτό το καινούργιο διάνυσμα θα έχει την ευχάριστη γεωμετρική ιδιότητα να είναι κάθετο στο επίπεδο που παράγεται (ορίζεται) από τα **a** και **b**. Ο ορισμός του εξωτερικού γινομένου βασίζεται στις έννοιες του πίνακα και της ορίζουσας, τις οποίες και θα ορίσουμε αμέσως τώρα. Μόλις γίνει αυτό, θα είμαστε σε θέση να δούμε τις γεωμετρικές συνέπειες αυτής της μαθηματικής κατασκευής.

Ορίζουμε σαν *πίνακα* 2×2 μία τετραγωνική διάταξη

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

όπου a_{11}, a_{12}, a_{21} και a_{22} είναι τέσσερις αριθμοί. Για παράδειγμα, οι

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$$

είναι πίνακες 2×2. Η *ορίζουσα*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ενός τέτοιου πίνακα είναι ο πραγματικός αριθμός που ορίζεται από την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-1=0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-6=-2, \quad \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 40-42=-2. \ \square$$

Ενας πίνακας 3×3 είναι μία τετραγωνική διάταξη

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

όπου πάλι, κάθε a_{ij} είναι πραγματικός αριθμός· με a_{ij} συμβολίζουμε το στοιχείο του πίνακα που βρίσκεται στη γραμμή i και στη στήλη j. Ορίζουμε την *ορίζουσα* ενός πίνακα 3×3 με βάση τον κανόνα

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Χωρίς κάποιον μνημονικό κανόνα, θα ήταν δύσκολο να θυμόμαστε τον τύπο (2). Ο κανόνας που μαθαίνουμε είναι ότι κινούμαστε κατά μήκος της πρώτης γραμμής, πολλαπλασιάζουμε τον a_{1j} με την ορίζουσα του πίνακα 2×2 που παίρνουμε αν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και την j-στή στήλη, και ύστερα προσθέτουμε όλα αυτά, προσέχοντας να βάλουμε το πρόσημο πλην μπροστά από τον a_{12} όρο. Για παράδειγμα, η ορίζουσα που πολλαπλασιάζουμε για τον μεσαίο όρο στον τύπο (2), η

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

παίρνεται αν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και τη δεύτερη στήλη του πίνακα 3×3 που μας έχουν δώσει:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0. \square$$

Μία σημαντική ιδιότητα των οριζουσών είναι ότι αν αντιμεταθέσουμε δύο γραμμές ή δύο στήλες, το αποτέλεσμα είναι μία αλλαγή προσήμου. Για τις ορίζουσες 2×2, αυτό προκύπτει από τον ορισμό ως εξής: Για την εναλλαγή γραμμών έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ &= -(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ενώ για την εναλλαγή στηλών,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

Αφήνουμε τον αναγνώστη να επαληθεύσει αυτή την ιδιότητα για την περίπτωση 3×3. (Δείτε την Ασκηση 1 στο τέλος αυτής της παραγράφου.)

Μια δεύτερη θεμελιώδης ιδιότητα των οριζουσών είναι ότι μπορούμε να εξάγουμε κοινό παράγοντα από οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη. Για ορίζουσες 2×2, αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ομοια, για ορίζουσες 3×3 έχουμε

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \alpha a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \alpha a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

και ούτω καθ' εξής. Αυτά τα αποτελέσματα είναι συνέπεια των ορισμών. Ειδικότερα, αν οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη αποτελείται από μηδενικά, τότε η τιμή της ορίζουσας είναι μηδέν.

Μία τρίτη θεμελιώδης ιδιότητα των οριζουσών είναι η εξής: Αν μεταβάλουμε μία γραμμή (ή στήλη) προσθέτοντας μίαν άλλη γραμμή (ή, αντίστοιχα, στήλη) σ' αυτήν, η τιμή της ορίζουσας παραμένει η ίδια. Για την περίπτωση 2×2 αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + a_1 & b_2 + a_2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 \\ b_1 + b_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 + a_2 \\ b_1 & b_1 + b_2 \end{vmatrix}.$$

Για την περίπτωση 3×3, αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 & a_3 \\ b_1 + b_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 + c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

και ούτω καθ' εξής. Πάλι, η ιδιότητα αυτή αποδεικνύεται με βάση τον ορισμό της ορίζουσας. (Βλέπε Ασκηση 35.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Υποθέτουμε ότι

$\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b} + \beta \mathbf{c}\cdot$ δηλαδή, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = \alpha(b_1, b_2, b_3) + \beta(c_1, c_2, c_3)$

Δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

ΛΥΣΗ Θα εξετάσουμε την περίπτωση $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$. Η περίπτωση $\alpha = 0 = \beta$ είναι τετριμμένη, και η περίπτωση όπου ακριβώς ένας από τους α, β είναι μηδέν αντιμετωπίζεται με μια απλή τροποποίηση όσων θα κάνουμε εδώ. Με βάση τις θεμελιώδεις ιδιότητες των οριζουσών, η ορίζουσα για την οποία συζητάμε γράφεται

$$\begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη γραμμή επί $-\alpha$)

$$= \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right) \begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix}$$

(πολλαπλασιάζοντας την τρίτη γραμμή επί $-\beta$)

$$= \frac{1}{\alpha\beta}\begin{vmatrix} \beta c_1 & \beta c_2 & \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix}$$ (προσθέτοντας τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη)

$$= \frac{1}{\alpha\beta}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix}$$ (προσθέτοντας την τρίτη γραμμή στην πρώτη)

$= 0.$ □

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Οι ορίζουσες, απ' ό,τι φαίνεται, επινοήθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά από τον Leibniz το 1693, σε σχέση με την επίλυση γραμμικών εξισώσεων. Ο Maclaurin και ο Cramer ανέπτυξαν τις ιδιότητές τους ανάμεσα στα 1729 και 1750· ειδικότερα, έδειξαν ότι η λύση του συστήματος εξισώσεων

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

είναι η

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad x_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

και

$$x_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

όπου

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

κάτι που έμεινε γνωστό με το όνομα ``κανόνας του Cramer''. Αργότερα, ο Vandermonde (1772) και ο Cauchy (1812), αντιμετωπίζοντας τις ορίζουσες σαν ένα ξεχωριστό θέμα άξιο ιδιαίτερης προσοχής, ανέπτυξαν την περιοχή πιο συστηματικά, με συνεισφορές από τους Laplace, Jacobi και άλλους. Οι τύποι για τον όγκο των παραλληλεπιπέδων με βάση τις ορίζουσες, οφείλονται στον Lagrange (1775). Θα τους μελετήσουμε πιο κάτω, σ' αυτήν την παράγραφο. Αν και στη διάρκεια του δέκατου ένατου αιώνα οι μαθηματικοί μελετούσαν τους πίνακες και τις ορίζουσες, τα δύο αντικείμενα εξετάζονταν ξεχωριστά. Για ολόκληρη την ιστορία μέχρι το 1900, βλ. T. Muir, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* (Η Θεωρία των Οριζουσών με τη Χρονολογική Σειρά της Ανάπτυξής της), ανατύπωση Dover, New York, 1960.

Αφού διατυπώσαμε τις αναγκαίες ιδιότητες των οριζουσών και συζητήσαμε την ιστορία τους, είμαστε πια έτοιμοι να προχωρήσουμε στο εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. Έστω $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ δύο διανύσματα στον $\mathbf{R}^3$. Ορίζουμε σαν *εξωτερικό γινόμενο* των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ και το συμβολίζουμε με $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, το διάνυσμα

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k},$$

ή, συμβολικά,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Αν και ορίσαμε τις ορίζουσες μόνο για τετραγωνικές διατάξεις *πραγματικών* αριθμών, η παραπάνω φορμαλιστική παράσταση που περιέχει και *διανύσματα* είναι χρήσιμη για την απομνημόνευση του εξωτερικού γινομένου.

Σημειώστε ότι το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι πάλι διάνυσμα· μερικές φορές λέγεται και *διανυσματικό γινόμενο.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Βρείτε το $(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

ΛΥΣΗ

$$(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}. \ \square$$

Από τον ορισμό συνάγονται μερικές αλγεβρικές ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου. Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ είναι διανύσματα και α, β και γ πραγματικοί αριθμοί, τότε

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$

(ii) $\mathbf{a} \times (\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) = \beta(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \gamma(\mathbf{a} \times \mathbf{c})$

$(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

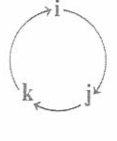
Σημειώνουμε ότι $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{a})$, από την ιδιότητα (i). Άρα, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$. Ειδικότερα,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Ακόμα,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j},$$

κάτι που μπορεί να θυμάται κανείς μεταθέτοντας τα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ κυκλικά, ως εξής:



Επόμενος στόχος μας είναι να δώσουμε μια γεωμετρική ερμηνεία του εξωτερικού γινομένου. Για το σκοπό αυτό, εισάγουμε πρώτα την έννοια του τριπλού γινομένου. Αν δοθούν τρία διανύσματα **a, b** και **c**, ο πραγματικός αριθμός

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

λέγεται τριπλό γινόμενο των **a, b** και **c** (μ' αυτή τη σειρά). Για να βρούμε έναν τύπο γι' αυτό, έστω $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, και $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Μπορούμε να γράψουμε πιο συνοπτικά

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι **a** είναι ένα διάνυσμα στο επίπεδο που παράγουν τα διανύσματα **b** και **c**. Αυτό σημαίνει ότι η πρώτη γραμμή στην ορίζουσα που ισούται με το $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, είναι της μορφής $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}$, επομένως $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$, από το Παράδειγμα 3. Μ' άλλα λόγια, το διάνυσμα $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ είναι ορθογώνιο προς κάθε διάνυσμα του επιπέδου που παράγουν τα **b** και **c**, κατά μείζονα δε λόγο προς το **b** και **c**.

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το μέτρο του $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|^2 &= \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= (b_2c_3 - b_3c_2)^2 + (b_1c_3 - b_3c_1)^2 + (b_1c_2 - b_2c_1)^2. \end{aligned}$$

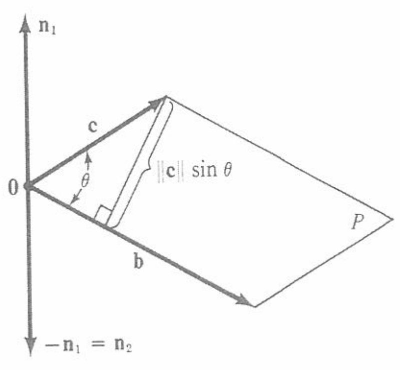
Εκτελώντας τις πράξεις, βλέπουμε ότι η τελευταία παράσταση είναι ίση με

$$\begin{aligned} &(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)^2 \\ &\quad = \|\mathbf{b}\|^2\|\mathbf{c}\|^2 - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 = \|\mathbf{b}\|^2\|\mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2\|\mathbf{c}\|^2 \cos^2\theta \\ &\quad = \|\mathbf{b}\|^2\|\mathbf{c}\|^2 \sin^2\theta \end{aligned}$$

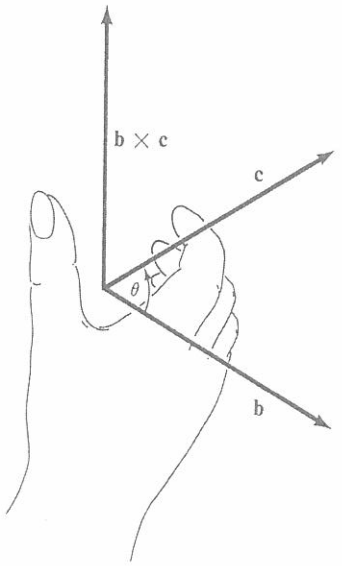
όπου θ είναι η γωνία ανάμεσα στα **b** και **c**, $0 \le \theta \le \pi$.

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματά μας, συμπεραίνουμε ότι το $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ *είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που παράγουν τα* **b** *και* **c** *με μήκος* $\|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|\,|\sin\theta|$. Υπάρχουν όμως δύο πιθανά διανύσματα που ικανοποιούν αυτές τις συνθήκες, γιατί υπάρχουν δύο επιλογές κατεύθυνσης κάθετες στο επίπεδο P που παράγουν τα **b** και **c**. Αυτό γίνεται καθαρό στο Σχήμα 1.3.1, που δείχνει τις δύο επιλογές $\mathbf{n}_1$ και $-\mathbf{n}_1$ τις κάθετες στο P, με $\|\mathbf{n}_1\| = \|-\mathbf{n}_1\| = \|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|\,|\sin\theta|$.

Ποιό διάνυσμα, το $\mathbf{n}_1$ ή το $-\mathbf{n}_1$, αναπαριστάνει το $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$; Η απάντηση είναι $\mathbf{n}_1 = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Δοκιμάστε μερικά παραδείγματα όπως το $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$ για να βεβαιωθείτε. Ο "κανόνας του δεξιού χεριού" που



Σχήμα 1.3.1 Τα $\mathbf{n}_1$ και $\mathbf{n}_2$ είναι δύο διανύσματα ορθογώνια και στο **b** και στο **c**, με στάθμη $\|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|\,|\sin\theta|$.



Σχήμα 1.3.2 Ο κανόνας του δεξιού χεριού μάς βοηθάει να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση προς την οποία δείχνει το $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$.

θα διατυπώσουμε αμέσως παρακάτω, προσδιορίζει τη φορά του $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$: Πάρτε την παλάμη του δεξιού σας χεριού και τοποθετήστε την κατά τέτοιον τρόπο ώστε τα δάχτυλά σας να στρέφονται από το $\mathbf{b}$ στο $\mathbf{c}$ κατά τη γωνία θ. Τότε ο αντίχειράς σας υποδεικνύει την κατεύθυνση του $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ (Σχήμα 1.3.2).

Αν τα $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ είναι συγγραμμικά τότε, $\sin\theta = 0$, άρα και $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = 0$· αν τα $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ δεν είναι συγγραμμικά, τότε παράγουν ένα επίπεδο και το $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο σ' αυτό το επίπεδο. *Το μήκος του* $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, $\|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|\,|\sin\theta|$, *είναι ακριβώς το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που έχει για πλευρές τα διανύσματα* $\mathbf{b}$ *και* $\mathbf{c}$ (Σχήμα 1.3.3).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα ορθογώνιο προς τα διανύσματα $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ και $\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

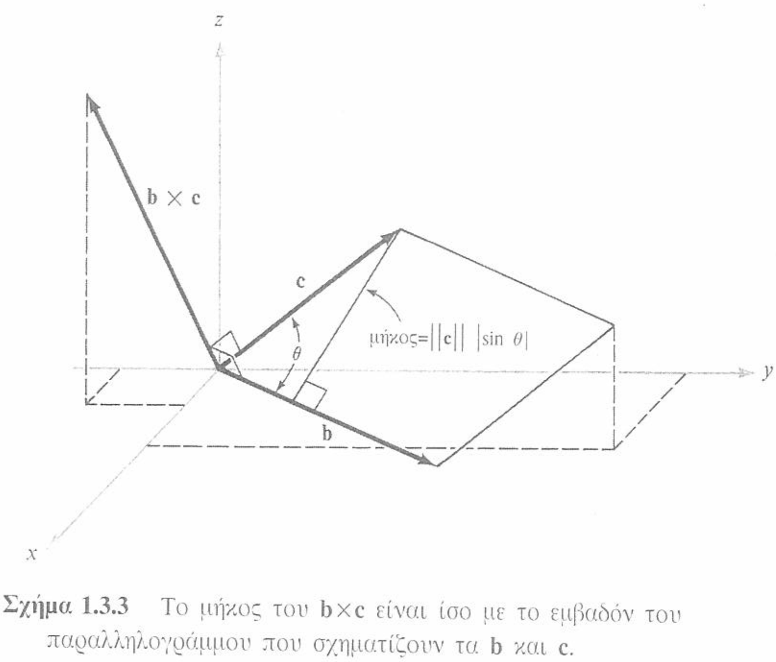
ΛΥΣΗ Ένα διάνυσμα κάθετο στα $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ και $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ είναι το

$$(\mathbf{i}+\mathbf{j})\times(\mathbf{j}+\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

Αφού $\|\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}\| = \sqrt{3}$, το διάνυσμα

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στα $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ και $\mathbf{j}+\mathbf{k}$. □



Σχήμα 1.3.3 Το μήκος του $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ είναι ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$.

Χρησιμοποιώντας το εξωτερικό γινόμενο, μπορούμε να δούμε τη βασική γεωμετρική ερμηνεία των 2×2 και κατόπιν, των 3×3 οριζουσών. Έστω $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ και $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j}$ δύο διανύσματα στο επίπεδο. Αν συμβολίσουμε με θ τη γωνία ανάμεσα στα $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$, έχουμε δει ότι $\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\| = \|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|\,|\sin\theta|$. Όπως παρατηρήσαμε πιο πάνω, $\|\mathbf{b}\|\ \|\mathbf{c}\|\ |\sin\theta|$ είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές **b** και **c** (βλέπε Σχήμα 1.3.3). Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου,

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}.$$

Άρα, η $\|\mathbf{b}\times\mathbf{c}\|$ είναι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = b_1c_2 - b_2c_1.$$

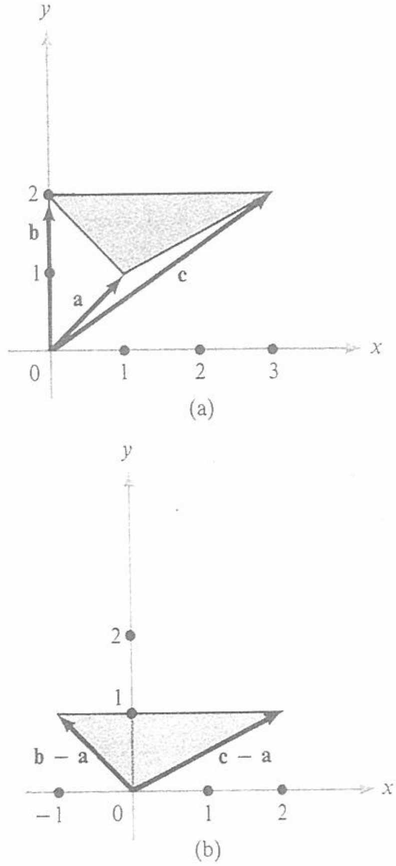
Από αυτό έπεται ότι *η απόλυτη τιμή της παραπάνω ορίζουσας είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα* $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ *και* $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές στα σημεία (1, 1), (0, 2) και (3, 2) (Σχήμα 1.3.4).

ΛΥΣΗ Εστω $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{j}$, και $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Είναι φανερό ότι το τρίγωνο του οποίου οι κορυφές είναι τα τελικά σημεία των διανυσμάτων **a**, **b** και **c** έχει το ίδιο εμβαδόν με το τρίγωνο που έχει σαν κορυφές τα $\mathbf{0}, \mathbf{b}-\mathbf{a}$ και $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ (Σχήμα 1.3.4). Πράγματι, το δεύτερο είναι απλή μεταφορά του πρώτου τριγώνου. Αφού το εμβαδόν αυτού του μεταφερμένου τριγώνου είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του παραλληλογράμμου με πλευρές $\mathbf{b}-\mathbf{a} = -\mathbf{i}+\mathbf{j}$ και $\mathbf{c}-\mathbf{a} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}$, βρίσκουμε ότι το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές (1, 1), (0, 2) και (3, 2) είναι η απόλυτη τιμή του

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2},$$

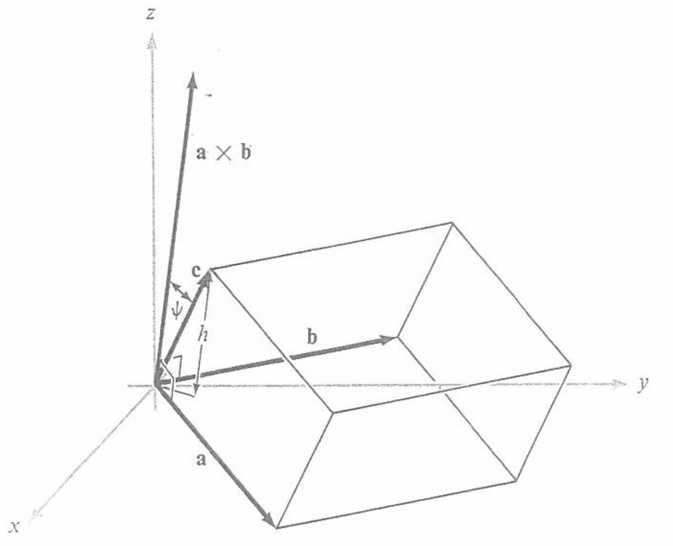
δηλαδή, $\frac{3}{2}$. □



Σχήμα 1.3.4 Πρόβλημα (a): Βρείτε το εμβαδόν A του σκιασμένου τριγώνου. Λύση: Εκφράστε τις πλευρές σαν διαφορές διανυσμάτων (b) οπότε $A = \frac{1}{2}\|(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\ (\mathbf{c}-\mathbf{a})\|$.

Υπάρχει μια ερμηνεία των οριζουσών 3×3 πινάκων σαν όγκοι, η οποία είναι ανάλογη με την ερμηνεία των οριζουσών 2×2 πινάκων σαν εμβαδά. Εστω $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, και $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$ διανύσματα στον $\mathbf{R}^3$. Θα δείξουμε ότι *ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με πλευρές* **a**, **b** *και* **c** (Σχήμα 1.3.5) *είναι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας*

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$



Σχήμα 1.3.5 Ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα **a**, **b**, **c** είναι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας του πίνακα 3 × 3 που έχει τα **a**, **b**, **c** σαν γραμμές.

Ξέρουμε ότι $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές **a** και **b**. Ακόμα, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \|\mathbf{c}\|\ \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \cos\psi$, όπου ψ είναι η οξεία γωνία που σχηματίζουν το **c** και το διάνυσμα το κάθετο στο επίπεδο που παράγουν τα **a** και **b**. Δεδομένου ότι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με πλευρές **a b** και **c** είναι το γινόμενο του εμβαδού της βάσης $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$ και του ύψους $\|\mathbf{c}\|\cos\psi$, έπεται ότι ο όγκος είναι $|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|$. Είδαμε στη θεωρία, πριν από το Παράδειγμα 5, ότι $D = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ και $D = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$. Άρα, η απόλυτη τιμή της D δίνει τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με πλευρές **a**, **b** και **c**.

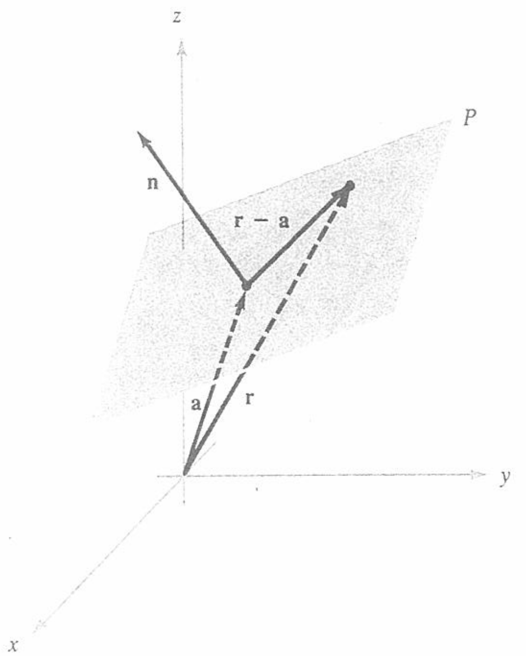
Για να ολοκληρώσουμε αυτή την παράγραφο, θα βρούμε με χρήση διανυσματικών μεθόδων την εξίσωση ενός επιπέδου στον χώρο. Εστω P ένα επίπεδο στον χώρο, **a** ένα διάνυσμα που καταλήγει στο επίπεδο, και **n** ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο (βλέπε Σχήμα 1.3.6).

Αν **r** είναι ένα διάνυσμα στον $\mathbf{R}^3$, τότε το τελικό σημείο του **r** είναι στο επίπεδο P αν και μόνο αν το $\mathbf{r} - \mathbf{a}$ είναι παράλληλο στο P, δηλαδή αν και μόνο αν $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = 0$ (το **n** είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα παράλληλο στο P –βλέπε Σχήμα 1.3.6). Επειδή το εσωτερικό γινόμενο είναι επιμεριστικό, αυτή η τελευταία συνθήκη είναι ισοδύναμη με την $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$. Επομένως, αν θέσουμε $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$, και $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, προκύπτει ότι το τελικό σημείο του **r** ανήκει στο P αν και μόνο αν

$$Ax + By + Cz = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = Aa_1 + Ba_2 + Ca_3. \qquad (3)$$

Δεδομένου ότι τα **n** και **a** είναι σταθερά, το δεξιό μέλος της εξίσωσης (3) είναι ένας αριθμός, ας πούμε $-D$. Άρα, μια εξίσωση που προσδιορίζει το επίπεδο P είναι η

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (4)$$



Σχήμα 1.3.6 Τα σημεία **r** του επιπέδου που περνάει από το **a** και είναι κάθετο στο **n** ικανοποιούν την εξίσωση $(\mathbf{r}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{n}=0$.

όπου το $A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ είναι κάθετο στο P· αντίστροφα, αν τα A, B και C δεν είναι όλα μηδέν, το σύνολο των σημείων (x, y, z) που ικανοποιούν την εξίσωση (4) είναι ένα επίπεδο με κάθετο διάνυσμα το $A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$. Η εξίσωση (4) είναι γραμμική ως προς τις τρεις μεταβλητές x, y, z άρα αντιστοιχεί γεωμετρικά σε μια γραμμική επιφάνεια, δηλαδή ένα επίπεδο στον $\mathbf{R}^3$.

Οι τέσσερις αριθμοί A, B, C, D δεν καθορίζονται μονοσήμαντα από το P. Για να το δείτε αυτό, παρατηρήστε ότι το (x, y, z) ικανοποιεί την εξίσωση (4) αν και μόνο αν ικανοποιεί επίσης και την εξίσωση

$$(\lambda A)x+(\lambda B)y+(\lambda C)z+(\lambda D)=0$$

για κάθε σταθερά $\lambda \neq 0$. Αν τα A, B, C, D και A', B', C', D' καθορίζουν το ίδιο επίπεδο P, τότε $A=\lambda A', B=\lambda B', C=\lambda C', D=\lambda D'$ για κάποιον αριθμό λ. Λέμε ότι τα A, B, C, D *καθορίζονται από το P modulo πολλαπλασιασμό με κάποιον αριθμό.* Αντίστροφα, αν δοθούν δύο τετράδες A, B, C, D και A', B', C', D' αυτές ορίζουν το ίδιο επίπεδο αν $A=\lambda A', B=\lambda B', C=\lambda C', D=\lambda D'$ για κάποιον αριθμό λ. Το συμπέρασμα αυτό θα γίνει πιο σαφές στο Παράδειγμα 8.

Το επίπεδο που έχει κάθετο διάνυσμα το $A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ και περνάει από ένα σημείο $R=(x_0, y_0, z_0)$ δίνεται από την

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{5}$$

(σημειώνουμε ότι με $x=x_0, y=y_0, z=z_0$ η εξίσωση (5) ικανοποιείται, επομένως, σ' αυτή την περίπτωση $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 Προσδιορίστε την εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ και περιέχει το σημείο (1, 0, 0).

ΛΥΣΗ Από την εξίσωση (5), το επίπεδο είναι το $1(x-1)+1(y-0)+1(z-0)=0$· δηλαδή, $x+y+z=1$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περιέχει τα σημεία (1, 1, 1), (2, 0, 0) και (1, 1, 0).

ΛΥΣΗ *Μέθοδος 1η* Η εξίσωση του επιπέδου είναι της μορφής $Ax+By+Cz+D=0$. Αφού τα σημεία (1, 1, 1), (2, 0, 0) και (1, 1, 0) είναι σημεία του επιπέδου, έχουμε

$$\begin{aligned} A+B+C+D&=0\\ 2A\qquad\quad +D&=0\\ A+B\qquad +D&=0 \end{aligned}$$

Προχωρώντας με απαλοιφή, φέρνουμε αυτό το σύστημα εξισώσεων στη μορφή

$$\begin{aligned} 2A+D&=0 &&\text{(2η εξίσωση)}\\ 2B+D&=0 &&(2\times 3\text{η} - 2\text{η})\\ C&=0 &&(1\text{η} - 3\text{η}) \end{aligned}$$

Αφού οι αριθμοί A, B, C και D προσδιορίζονται, modulo πολλαπλασιασμό επί αριθμό, μπορούμε να σταθεροποιήσουμε την τιμή ενός απ' αυτούς και οι υπόλοιποι θα οριστούν μονοσήμαντα. Αν θέσουμε $D=-2$, τότε $A=+1, B=+1, C=0$. Άρα, η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει τα δοθέντα σημεία είναι $x+y-2=0$.
Μέθοδος 2η Εστω $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$. Κάθε διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο πρέπει να είναι ορθογώνιο προς τα διανύσματα $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}-\mathbf{b}$, που είναι παράλληλα στο επίπεδο γιατί τα άκρα τους βρίσκονται πάνω σ' αυτό. Άρα, το $\mathbf{n}=(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{c}-\mathbf{b})$ είναι κάθετο στο επίπεδο. Υπολογίζοντας το εξωτερικό γινόμενο, βρίσκουμε

$$\mathbf{n}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{i}-\mathbf{j}.$$

Άρα, κάθε εξίσωση του επιπέδου είναι της μορφής $-x-y+D=0$ (modulo πολλαπλασιασμό με αριθμό). Αφού το (2, 0, 0) είναι σημείο του επιπέδου, $D=+2$. Αντικαθιστώντας, καταλήγουμε στην $x+y-2=0$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 Βρείτε την απόσταση του σημείου $E=(x_1, y_1, z_1)$ από το επίπεδο με εξίσωση $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=Ax+By+Cz+D=0$.

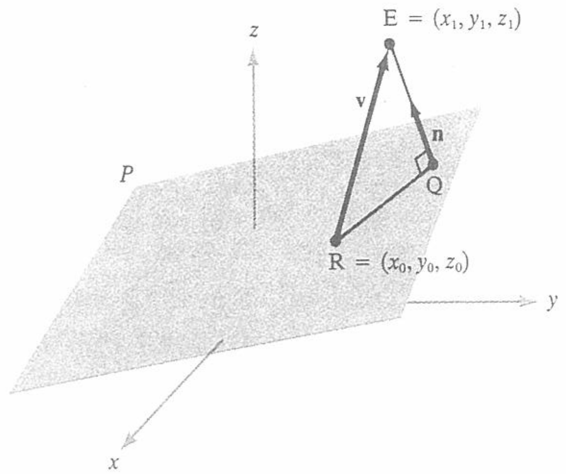
ΛΥΣΗ Θεωρούμε το διάνυσμα

$$\mathbf{n}=\frac{A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

το οποίο είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο. Φέρνουμε την κάθετη από το E στο επίπεδο και κατασκευάζουμε το τρίγωνο REQ, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3.7. Η απόσταση $d=|\mathrm{EQ}|$

είναι το μήκος της προβολής του $\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathrm{RE}}$ (του διανύσματος από το R προς το E) πάνω στο $\mathbf{n}$· άρα,

$$\text{απόσταση} = |\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}| = |[(x_1-x_0)\mathbf{i}+(y_1-y_0)\mathbf{j}+(z_1-z_0)\mathbf{k}]\cdot\mathbf{n}|$$
$$= \frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$



Σχήμα 1.3.7 Γεωμετρική μέθοδος υπολογισμού της απόστασης του σημείου E από το επίπεδο P.

Αν το επίπεδο μας δοθεί στη μορφή $Ax+By+Cz+D=0$, διαλέγουμε ένα σημείο (x_0, y_0, z_0) πάνω σ' αυτό και παρατηρούμε ότι $D = -(Ax_0+By_0+Cz_0)$. Αντικαθιστώντας στον προηγούμενο τύπο, συμπεραίνουμε ότι

$$\text{απόσταση} = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \quad \square$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Επαληθεύστε ότι αν αντιμεταθέσουμε δύο γραμμές ή δύο στήλες της 3×3 ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

τότε αλλάζει το πρόσημο της ορίζουσας (διαλέξτε δύο οποιεσδήποτε γραμμές και δύο οποιεσδήποτε στήλες).

2. Υπολογίστε τις

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 36 & 18 & 17 \\ 45 & 24 & 20 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{vmatrix}$

3. Υπολογίστε το $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, όπου $\mathbf{a} = \mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

4. Υπολογίστε το $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, όπου τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι όπως στην Ασκηση 3 και $\mathbf{c} = 3\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

5. Βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα **a** και **b** της Ασκησης 3.

6. Ενα τρίγωνο έχει κορυφές τα (0, 0, 0), (1, 1, 1) και (0, −2, 3). Βρείτε το εμβαδόν του.

7. Ποιός είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με πλευρές $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}, 5\mathbf{i}-3\mathbf{k}$, και $\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$;

8. Ποιός είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με πλευρές $\mathbf{i}, 3\mathbf{j}-\mathbf{k}$, και $4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$;

Στις Ασκήσεις 9 ώς 12, περιγράψτε όλα τα μοναδιαία διανύσματα που είναι ορθογώνια προς τα δοθέντα διανύσματα.

9. $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

10. $-5\mathbf{i}+9\mathbf{j}-4\mathbf{k}, 7\mathbf{i}+8\mathbf{j}+9\mathbf{k}$

11. $-5\mathbf{i}+9\mathbf{j}-4\mathbf{k}, 7\mathbf{i}+8\mathbf{j}+9\mathbf{k}, \mathbf{0}$

12. $2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+3\mathbf{k}, -4\mathbf{i}+8\mathbf{j}-6\mathbf{k}$

13. Υπολογίστε τα $\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}, \|\mathbf{u}\|, \|\mathbf{v}\|$ και $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, αν $\mathbf{u}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{v}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

14. Επαναλάβετε την Ασκηση 13 με $\mathbf{u}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}, \mathbf{v}=-6\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

15. Βρείτε μία εξίσωση για το επίπεδο το οποίο
(a) είναι κάθετο στο $\mathbf{v}=(1,1,1)$ και περνάει από το (1, 0, 0).
(b) είναι κάθετο στο $\mathbf{v}=(1,2,3)$ και περνάει από το (1, 1, 1).
(c) είναι κάθετο στην ευθεία $\mathbf{l}(t)=(5,0,2)t+(3,-1,1)$ και περνάει από το $(5,-1,0)$.
(d) είναι κάθετο στην ευθεία $\mathbf{l}(t)=(-1,-2,3)t+(0,7,1)$ και περνάει από το $(2,4,-1)$.

16. Βρείτε μία εξίσωση για το επίπεδο που περνάει από τα (a) (0, 0, 0), (2, 0, −1) και (0, 4, -3), (b) (1, 2, 0), (0, 1, −2) και (4, 0, 1), και (c) (2, −1, 3), (0, 0, 5) και (5, 7, −1).

17. (a) Δείξτε τις ταυτότητες $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{A}$ και $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$ για τό τριπλό διανυσματικό γινόμενο.
(b) Δείξτε ότι $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}=\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ αν και μόνο αν $(\mathbf{u}\times\mathbf{w})\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$.
(c) Δείξτε ότι $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}+(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times\mathbf{u}+(\mathbf{w}\times\mathbf{u})\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$ (*η ταυτότητα του Jacobi.*)*

18. (a) Δείξτε, χωρίς να καταφύγετε στη γεωμετρία, ότι

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) &= \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u})=\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\\ &= -\mathbf{u}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{v})\\ &= -\mathbf{w}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{u})=-\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{w})\end{aligned}$$

(b) Δείξτε ότι

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}'\times\mathbf{v}')=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}')(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}')-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}')(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v})=\begin{vmatrix}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}' & \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}'\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}' & \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'\end{vmatrix}$$

[ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Χρησιμοποιήστε το μέρος (a) και την Ασκηση 17(a).]

19. Επαληθεύστε τον κανόνα του Cramer, που αναφέρθηκε στην Ιστορική Σημείωση πριν από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου.

20. Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περνάει από το $(2,-1,3)$ και είναι κάθετο στην $\mathbf{v}=(1,-2,2)+t(3,-2,4)$.

21. Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περνάει από το $(1,2,-3)$ και είναι κάθετο στην $\mathbf{v}=(0,-2,1)+t(1,-2,3)$.

22. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το $(1,-2,-3)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο $3x-y-2z+4=0$.

23. Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περιέχει τις ευθείες

$$\mathbf{v}_1=(0,1,-2)+t(2,3,-1)$$

και

$$\mathbf{v}_2=(2,-1,0)+t(2,3,-1)$$

24. Βρείτε την απόσταση του $(2,1,-1)$ από το επίπεδο $x-2y+2z+5=0$.

25. Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περιέχει την ευθεία $\mathbf{v}=(-1,1,2)+t(3,2,4)$ και είναι κάθετο στο επίπεδο $2x+y-3z+4=0$.

26. Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περνάει από τα $(3,2,-1)$ και $(1,-1,2)$, και είναι παράλληλο στην ευθεία $\mathbf{v}=(1,-1,0)+t(3,2,-2)$.

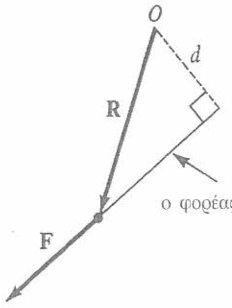
27. Επαναλάβετε τις Ασκήσεις 19 και 20 της Παραγράφου 1.1 χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο και όσα γνωρίζετε για το κάθετο διάνυσμα ενός επιπέδου.

28. Αν δοθούν τα διανύσματα **a** και **b**, είναι σωστό ότι οι εξισώσεις $\mathbf{x}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}$ και $\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}=\|\mathbf{a}\|$ ορίζουν μονοσήμαντα κάποιο διάνυσμα **x**; Δικαιολογήστε την απάντησή σας με δύο τρόπους, γεωμετρικά και αναλυτικά.

29. Προσδιορίστε την απόσταση του επιπέδου $12x+13y+5z+2=0$ από το σημείο $(1,1,-5)$.

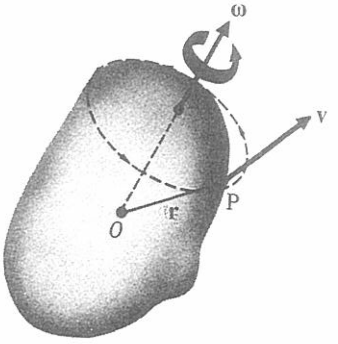
*(Σ.τ.Ε.) Η (b) είναι άμεση συνέπεια της (c). Ίσως η σειρά των ερωτημάτων θα έπρεπε να αντιστραφεί.

30. Βρείτε την απόσταση του σημείου (6, 1, 0) από το επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετο στο $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.



Σχήμα 1.3.8 Ροπή δύναμης.

31. Στην Μηχανική, *η ροπή M μιας δύναμης* $\mathbf{F}$ *ως προς σημείο O* ορίζεται σαν το γινόμενο του μέτρου της δύναμης $\mathbf{F}$ επί την κάθετη απόσταση d του σημείου O από την ευθεία δράσης της $\mathbf{F}$. (Θυμηθείτε από το Παράδειγμα 10 της Παραγράφου 1.1 ότι μπορούμε να θεωρούμε τις δυνάμεις ως διανύσματα.) Το διάνυσμα ροπής $\mathbf{M}$ είναι το διάνυσμα μέτρου M του οποίου η διεύθυνση είναι κάθετη στο επίπεδο των O και $\mathbf{F}$, η δε φορά του καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Δείξτε ότι $\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$, όπου $\mathbf{R}$ είναι τυχόν διάνυσμα με αρχή το O και τελικό σημείο πάνω στην ευθεία δράσης της $\mathbf{F}$ (βλέπε Σχήμα 1.3.8).



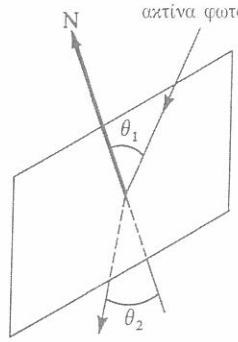
Σχήμα 1.3.9 Το σημείο P έχει διάνυσμα ταχύτητας v.

32. Η *γωνιακή ταχύτητα* $\boldsymbol{\omega}$ περιστροφής ενός στερεού σώματος έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής και μέτρο ίσο με τον ρυθμό της περιστροφής σε rad ανά δευτερόλεπτο. Η φορά του $\boldsymbol{\omega}$ καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

(a) Εστω $\mathbf{r}$ ένα διάνυσμα από τον άξονα προς ένα σημείο P του στερεού σώματος. Δείξτε ότι η ποσότητα $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ δίνει την ταχύτητα του P, όπως στο Σχήμα 1.3.9, με $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_1$ και $\mathbf{r} = \mathbf{v}_2$.

(b) Ερμηνεύστε το αποτέλεσμα στην περίπτωση της στροφής ενός κυλίνδρου γύρω από τον άξονά του, με P ένα σημείο στην περιφέρεια.

33. Δύο μέσα με δείκτες διάθλασης n_1 και n_2 διαχωρίζονται από μία επίπεδη επιφάνεια με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα το $\mathbf{N}$. Εστω $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ μοναδιαία διανύσματα πάνω στις προσπίπτουσες και διαθλώμενες ακτίνες αντίστοιχα, δηλαδή να έχουν τη διεύθυνση των ακτίνων του φωτός. Δείξτε ότι $n_1(\mathbf{N} \times \mathbf{a}) = n_2(\mathbf{N} \times \mathbf{b})$ χρησιμοποιώντας *τον νόμο του Snell*, $\sin\theta_1/\sin\theta_2 = n_2/n_1$, όπου θ_1 και θ_2 είναι οι γωνίες πρόσπτωσης και διάθλασης αντίστοιχα (βλέπε Σχήμα 1.3.10).



Σχήμα 1.3.10 Νόμος του Snell.

***34.** Δικαιολογήστε τα βήματα στον παρακάτω υπολογισμό:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} = 33 - 36 = -3.$$

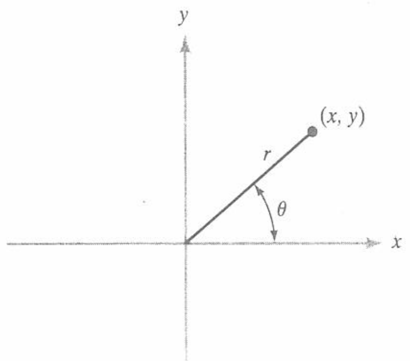
***35.** Δείξτε ότι αν προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο της πρώτης γραμμής ενός πίνακα στη δεύτερη γραμμή του, τότε η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται· δηλαδή,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \lambda a_1 & b_2 + \lambda b_1 & c_2 + \lambda c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

[Πιό γενικά, αν προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο οποιασδήποτε γραμμής (στήλης) ενός πίνακα σε μιαν άλλη γραμμή (στήλη) του, η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται.]

1.4

Κυλινδρικές και Σφαιρικές Συντεταγμένες



Σχήμα 1.4.1 Οι πολικές συντεταγμένες του (x, y) είναι (r, θ).

Ο πιο συνηθισμένος τρόπος αναπαράστασης ενός σημείου στο επίπεδο $\mathbf{R}^2$ είναι μέσω ορθογωνίων συντεταγμένων (x, y). Ομως, όπως πολύ πιθανόν να γνωρίζει ο αναγνώστης από τον στοιχειώδη λογισμό, οι πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο είναι συχνά εξαιρετικά χρήσιμες. Οπως περιγράφεται στο Σχήμα 1.4.1, οι συντεταγμένες (r, θ) συνδέονται με τις (x, y) μέσω των εξισώσεων

$$x = r\cos\theta \qquad \text{και} \qquad y = r\sin\theta,$$

όπου συνήθως παίρνουμε $r \geq 0$ και $0 \leq \theta < 2\pi$.

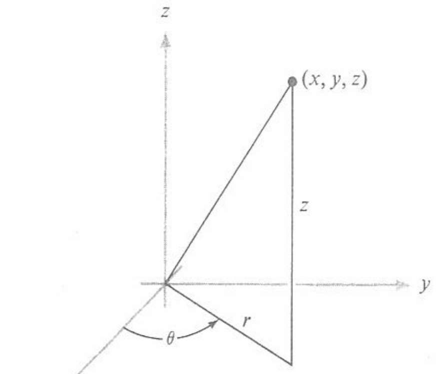
Συμβουλεύουμε τους αναγνώστες που δεν είναι εξοικειωμένοι με τις πολικές συντεταγμένες να μελετήσουν τη σχετική παράγραφο ενός βιβλίου απειροστικού λογισμού. Ο σκοπός μας είναι να δούμε δύο τρόπους αναπαράστασης σημείων στον χώρο, διαφορετικούς απ' αυτόν με ορθογώνιες Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z). Αυτά τα εναλλακτικά συστήματα συντεταγμένων είναι ιδιαίτερα χρήσιμα για κάποια είδη προβλημάτων, όπως ο υπολογισμός ολοκληρωμάτων (βλέπε Παράγραφο 6.3).

ΟΡΙΣΜΟΣ (Βλέπε Σχήμα 1.4.2). Οι *κυλινδρικές συντεταγμένες* (r, θ, z) ενός σημείου (x, y, z) ορίζονται από τις

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z \tag{1}$$

ή, αναλυτικά, από τις

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = z, \quad \theta = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) & \text{αν } x > 0 \text{ και } y \geq 0 \\ \pi + \tan^{-1}(y/x) & \text{αν } x < 0 \\ 2\pi + \tan^{-1}(y/x) & \text{αν } x > 0 \text{ και } y < 0 \end{cases}$$



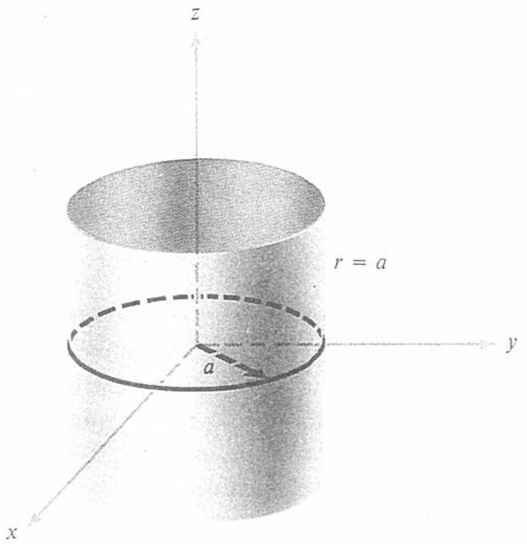
Σχήμα 1.4.2 Αναπαράσταση ενός σημείου (x, y, z) με βάση τις κυλινδρικές του συντεταγμένες r, θ και z.

όπου το $\tan^{-1}(y/x)$ είναι ανάμεσα στα $-\pi/2$ και $\pi/2$. Αν $x = 0$, τότε $\theta = \pi/2$ για $y > 0$ και $3\pi/2$ για $y < 0$. Αν $x = y = 0$, το θ δεν ορίζεται.

Με άλλα λόγια, για κάθε σημείο (x, y, z), μετατρέπουμε την πρώτη και τη δεύτερη συντεταγμένη σε πολικές συντεταγμένες και αφήνουμε την τρίτη αμετάβλητη. Ο τύπος (1) δείχνει ότι, αν δοθεί η (r, θ, z), η τριάδα (x, y, z) καθορίζεται μονοσήμαντα, και αντίστροφα, αν περιορίσουμε το θ στο διάστημα $[0, 2\pi)$ (μερικές φορές βολεύει περισσότερο το διάστημα $(-\pi, \pi]$) και απαιτήσουμε $r > 0$.

Για να δικαιολογήσουμε τον όρο "κυλινδρικές συντεταγμένες", σημειώνουμε ότι αν $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$, και $r = a$ μια θετική σταθερά, τότε ο γεωμετρικός τόπος αυτών των σημείων είναι ένας κύλινδρος ακτίνας a (βλέπε Σχήμα 1.4.3).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (a) Βρείτε και σχεδιάστε τις κυλινδρικές συντεταγμένες του (6, 6, 8). (b) Αν ένα σημείο έχει κυλινδρικές συντεταγμένες $(8, 2\pi/3, -3)$, ποιές είναι οι Καρτεσιανές του συντεταγμένες; Σχεδιάστε.



Σχήμα 1.4.3 Το γράφημα των σημείων των οποίων οι κυλινδρικές συντεταγμένες ικανοποιούν την $r = a$ είναι ένας κύλινδρος.

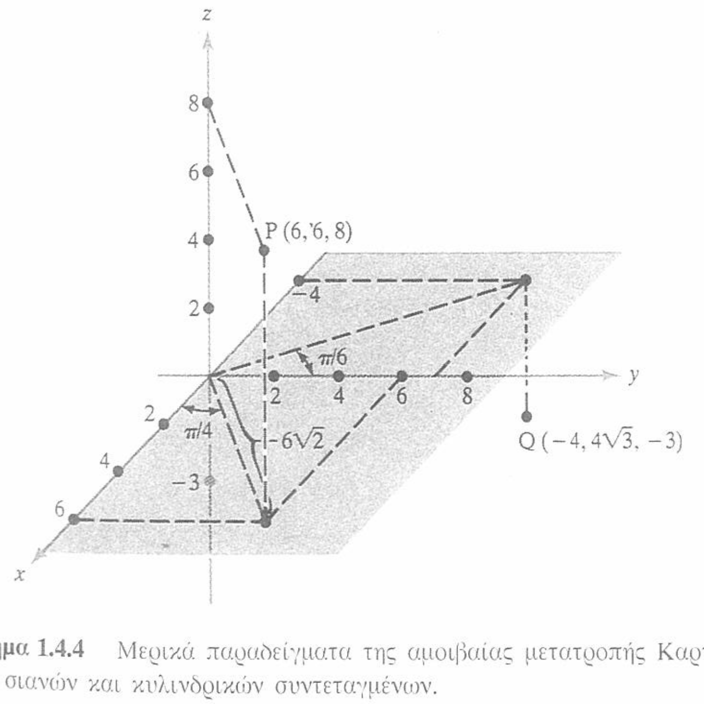
ΛΥΣΗ Για το (a) έχουμε $r = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ και $\theta = \tan^{-1}(6/6) = \tan^{-1}(1) = \pi/4$. Άρα, οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι $(6\sqrt{2}, \pi/4, 8)$. Αυτό είναι το σημείο P του Σχήματος 1.4.4. Για το (b) έχουμε

$$x = r\cos\theta = 8\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{8}{2} = -4$$

και

$$y = r\sin\theta = 8\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Άρα, οι Καρτεσιανές συντεταγμένες είναι $(-4, 4\sqrt{3}, -3)$. Αυτό είναι το σημείο Q του σχήματος. □



Σχήμα 1.4.4 Μερικά παραδείγματα της αμοιβαίας μετατροπής Καρτεσιανών και κυλινδρικών συντεταγμένων.

Οι κυλινδρικές συντεταγμένες δεν αποτελούν τη μόνη δυνατή γενίκευση των πολικών συντεταγμένων στις τρεις διαστάσεις. Θυμηθείτε ότι στις δύο διαστάσεις το μέτρο του διανύσματος $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ (δηλαδή ο αριθμός $\sqrt{x^2 + y^2}$) είναι το r του συστήματος πολικών συντεταγμένων. Στις κυλινδρικές συντεταγμένες, το μήκος του διανύσματος $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, δηλαδή ο αριθμός

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

δεν είναι μία από τις συντεταγμένες του συστήματος —χρησιμοποιούμε μόνο το μέγεθος $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, τη γωνία θ και το "ύψος" z.

Θα προχωρήσουμε σ' αυτή την τροποποίηση εισάγοντας το σύστημα *σφαιρικών συντεταγμένων*, το οποίο χρησιμοποιεί το ρ σαν συντεταγμένη. Οι σφαιρικές συντεταγμένες είναι συχνά χρήσιμες για προβλήματα που παρουσιάζουν σφαιρική συμμετρία (συμμετρία ως προς σημείο), ενώ οι κυλινδρικές συντεταγμένες χρησιμοποιούνται όταν παρουσιάζεται κυλινδρική συμμετρία (συμμετρία ως προς ευθεία).

Αν μας δώσουν ένα σημείο (x, y, z) στον $\mathbf{R}^3$, θέτουμε

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

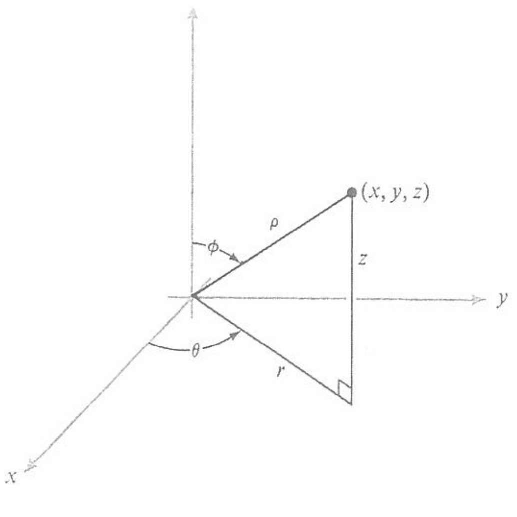
και παριστάνουμε τα x και y με πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο xy:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{2}$$

όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ και η θ δίνεται από τον τύπο (1). Η συντεταγμένη z δίνεται από την

$$z = \rho\cos\phi,$$

όπου ϕ είναι η γωνία (μεταξύ 0 και π, των άκρων συμπεριλαμβανομένων) που σχηματίζει το διάνυσμα $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ με τον άξονα z, στο επίπεδο που περιέχει το διάνυσμα $\mathbf{v}$ και τον άξονα z (βλέπε Σχήμα 1.4.5).



Σχήμα 1.4.5 Οι σφαιρικές συντεταγμένες (ρ, θ, ϕ)· το γράφημα των σημείων που ικανοποιούν την $\rho = a$ είναι σφαίρα.

Χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο, μπορούμε να εκφράσουμε την ϕ ως εξής:

$$\cos\phi = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{v}\|}, \qquad \text{δηλ.} \qquad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{v}\|}\right).$$

Παίρνουμε σαν συντεταγμένες μας τις ποσότητες ρ, θ, ϕ. Δεδομένου ότι

$$r = \rho\sin\phi$$

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (2) για να βρούμε τα x, y, z συναρτήσει των σφαιρικών συντεταγμένων ρ, θ, ϕ.

Ορισμός Οι *σφαιρικές συντεταγμένες* του (x, y, z) ορίζονται ως εξής:

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \qquad z = \rho\cos\phi \tag{3}$$

όπου

$$\rho \geq 0, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi, \qquad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Παρατηρήστε ότι οι σφαιρικές συντεταγμένες θ και ϕ μοιάζουν με τις γεωγραφικές συντεταγμένες, δηλαδή το γεωγραφικό μήκος και πλάτος, αν πάρουμε τον άξονα της γης σαν άξονα z. Υπάρχουν όμως και κάποιες διαφορές: το γεωγραφικό μήκος είναι $|\theta|$ και λέγεται ανατολικό ή δυτικό, ανάλογα με το αν η θ είναι θετική ή αρνητική· το γεωγραφικό πλάτος είναι $|\pi/2 - \phi|$ και λέγεται βόρειο ή νότιο ανάλογα με το αν η $\pi/2 - \phi$ είναι θετική ή αρνητική.

Σημειώνουμε ότι σε σφαιρικές συντεταγμένες η εξίσωση της σφαίρας με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα a παίρνει την απλούστατη μορφή

$$\rho = a.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

(a) Βρείτε τις σφαιρικές συντεταγμένες του $(1, -1, 1)$ και σχεδιάστε.

(b) Βρείτε τις Καρτεσιανές συντεταγμένες του $(3, \pi/6, \pi/4)$ και σχεδιάστε.

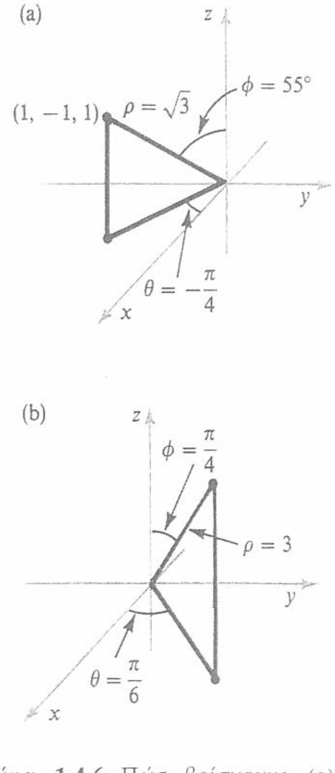
(c) Εστω ένα σημείο με Καρτεσιανές συντεταγμένες $(2, -3, 6)$. Βρείτε τις σφαιρικές του συντεταγμένες και σχεδιάστε.

(d) Εστω ένα σημείο με σφαιρικές συντεταγμένες $(1, -\pi/2, \pi/4)$. Βρείτε τις Καρτεσιανές του συντεταγμένες και σχεδιάστε.

ΛΥΣΗ

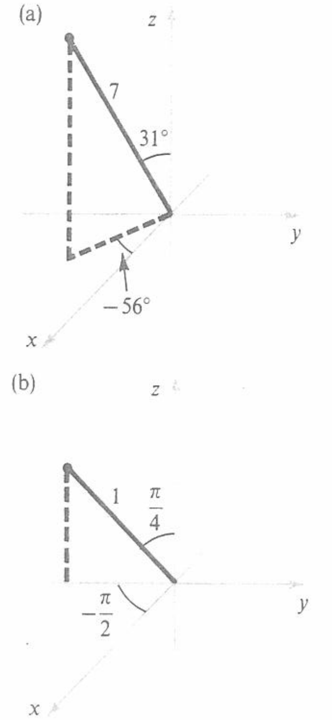
(a)
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3},$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}, *$$
$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 0.955 \approx 54.74°.$$

Βλέπε Σχήμα 1.4.6(a).

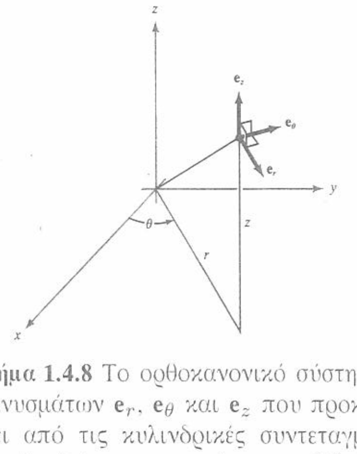


Σχήμα 1.4.6 Πώς βρίσκουμε (a) τις σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου $(1, -1, 1)$ και (b) τις Καρτεσιανές συντεταγμένες του $(3, \pi/6, \pi/4)$.

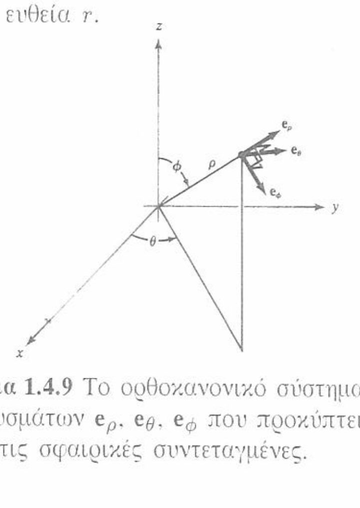
* (Σ.τ.Ε.) Σύμφωνα με τη σύμβαση του ορισμού των ίδιων των συγγραφέων, για $x>0, y<0$ η τιμή τής θ είναι $2\pi + \tan^{-1}\frac{y}{x} = 7\frac{\pi}{4}$. Ομοίως, στο (c) $\theta \approx 2\pi - 0{,}983 \approx 303{,}69°$.



Σχήμα 1.4.7 Πώς βρίσκουμε (a) τις σφαιρικές συντεταγμένες του $(2,-3,6)$ και (b) τις Καρτεσιανές συντεταγμένες του $(1,-\pi/2,\pi/4)$.



Σχήμα 1.4.8 Το ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ και $\mathbf{e}_z$ που προκύπτει από τις κυλινδρικές συντεταγμένες. Το διάνυσμα $\mathbf{e}_r$ είναι παράλληλο στην ευθεία r.



Σχήμα 1.4.9 Το ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$ που προκύπτει από τις σφαιρικές συντεταγμένες.

(b)
$$x=\rho\sin\phi\cos\theta=3\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$
$$y=\rho\sin\phi\sin\theta=3\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{\sqrt{2}},$$
$$z=\rho\cos\phi=3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$
Βλέπε Σχήμα 1.4.6(b)

(c)
$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}=\sqrt{49}=7,$$
$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{-3}{2}\right)\approx-0.983\approx-56.31°,$$
$$\phi=\cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{6}{7}\right)\approx0.541\approx31.0°.$$
Βλέπε Σχήμα 1.4.7(a).

(d)
$$x=\rho\sin\phi\cos\theta=1\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot0=0,$$
$$y=\rho\sin\phi\sin\theta=1\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-1)=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$z=\rho\cos\phi=1\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$
Βλέπε Σχήμα 1.4.7(b). □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Εκφράστε (a) την επιφάνεια $xz=1$ και (b) την επιφάνεια $x^2+y^2-z^2=1$ σε σφαιρικές συντεταγμένες.

ΛΥΣΗ Από τη σχέση (3), $x=\rho\sin\phi\cos\theta, z=\rho\cos\phi$, επομένως η επιφάνεια (a) από όλα τα (ρ,θ,ϕ) για τα οποία

$$\rho^2\sin\phi\cos\theta\cos\phi=1,\qquad \text{δηλ.,}\qquad \rho^2\sin2\phi\cos\theta=2.$$

Για το (b) μπορούμε να γράψουμε

$$x^2+y^2-z^2=x^2+y^2+z^2-2z^2=\rho^2-2\rho^2\cos^2\phi,$$

δηλαδή η επιφάνεια είναι η $\rho^2(1-2\cos^2\phi)=1$, ή $-\rho^2\cos(2\phi)=1$.

Από τις κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες προκύπτουν με φυσικό τρόπο μοναδιαία διανύσματα που παίζουν αντίστοιχο ρόλο μ' αυτόν των $\mathbf{i},\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ για τις ορθογώνιες συντεταγμένες. Τα έχουμε σχεδιάσει στα Σχήματα 1.4.8 και 1.4.9. Για παράδειγμα, $\mathbf{e}_r$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι παράλληλο στο επίπεδο xy και έχει την ακτινική διεύθυνση, δηλαδή $\mathbf{e}_r=(\cos\theta)\mathbf{i}+(\sin\theta)\mathbf{j}$. Ομοια, στις σφαιρικές συντεταγμένες $\mathbf{e}_\phi$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που εφάπτεται στην καμπύλη που έχει παράμετρο τη μεταβλητή ϕ, και τις μεταβλητές ρ και θ σταθεροποιημένες. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτά τα μοναδιαία διανύσματα αργότερα, όταν θα εφαρμόσουμε τις κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες στον διανυσματικό λογισμό (βλέπε Παράγραφο 3.5). □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. (a) Δίνονται πιο κάτω μερικά σημεία σε κυλινδρικές συντεταγμένες· εκφράστε το καθένα από αυτά σε ορθογώνιες και σε σφαιρικές συντεταγμένες: $(1, 45°, 1)$, $(2, \pi/2, -4)$, $(0, 45°, 10)$, $(3, \pi/6, 4)$, $(1, -\pi/6, 0)$, $(2, 3\pi/4, -2)$.
(b) Μετατρέψτε τα παρακάτω σημεία από ορθογώνιες σε σφαιρικές και σε κυλινδρικές συντεταγμένες: $(2, 1, -2)$, $(0, 3, 4)$, $(\sqrt{2}, 1, 1)$, $(-2\sqrt{3}, -2, 3)$.

2. Περιγράψτε τη γεωμετρική σημασία των παρακάτω απεικονίσεων (που είναι γραμμένες σε κυλινδρικές συντεταγμένες):
(a) $(r, \theta, z) \to (r, \theta, -z)$
(b) $(r, \theta, z) \to (r, \theta + \pi, -z)$
(c) $(r, \theta, z) \to (-r, \theta - \pi/4, z)$

3. Περιγράψτε τη γεωμετρική σημασία των παρακάτω απεικονίσεων (που είναι γραμμένες σε σφαιρικές συντεταγμένες):
(a) $(\rho, \theta, \phi) \to (\rho, \theta + \pi, \phi)$
(b) $(\rho, \theta, \phi) \to (\rho, \theta, \pi - \phi)$
(c) $(\rho, \theta, \phi) \to (2\rho, \theta + \pi/2, \phi)$

4. (a) Περιγράψτε τις επιφάνειες r =σταθερά, θ=σταθερά και z=σταθερά στο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων.
(b) Περιγράψτε τις επιφάνειες ρ=σταθερά, θ=σταθερά και ϕ=σταθερά στο σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων.

5. Δείξτε ότι για την αναπαράσταση του τυχόντος σημείου του $\mathbf{R}^3$ με σφαιρικές συντεταγμένες κατά μοναδικό τρόπο, είναι αναγκαίο να πάρουμε μόνο τιμές του θ μεταξύ του 0 και 2π, τιμές του ϕ μεταξύ 0 και π και τιμές του $\rho \geq 0$. Ορίζονται οι συντεταγμένες μονοσήμαντα, αν επιτρέψουμε $\rho \leq 0$;

6. Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες και το ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ και $\mathbf{e}_z$ (βλέπε Σχήμα 1.4.8),
(a) εκφράστε καθένα από τα $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ και $\mathbf{e}_z$ συναρτήσει των $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ και (x, y, z)· και
(b) υπολογίστε το $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{j}$ με δύο τρόπους: αναλυτικά, χρησιμοποιώντας το (a), και γεωμετρικά.

7. Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες και το ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta$ και $\mathbf{e}_\phi$ (βλέπε Σχήμα 1.4.9),
(a) εκφράστε καθένα από τα $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta$ και $\mathbf{e}_\phi$ συναρτήσει των $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ και (x, y, z)· και
(b) υπολογίστε το $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{j}$ και $\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{j}$ με δύο τρόπους: αναλυτικά και γεωμετρικά.

8. Εκφράστε το επίπεδο $z = x$: (a) σε κυλινδρικές και (b) σε σφαιρικές συντεταγμένες.

9. Δείξτε ότι σε σφαιρικές συντεταγμένες:
(a) ρ είναι το μήκος του $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
(b) $\phi = \cos^{-1}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}/\|\mathbf{v}\|)$, όπου $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
(c) $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}/\|\mathbf{u}\|)$, όπου $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

10. Δύο επιφάνειες περιγράφονται σε σφαιρικές συντεταγμένες από τις εξισώσεις $\rho = f(\theta, \phi)$ και $\rho = -2f(\theta, \phi)$, όπου $f(\theta, \phi)$ είναι μία συνάρτηση δύο μεταβλητών. Εξηγήστε γεωμετρικά πώς μπορούμε να πάρουμε τη δεύτερη επιφάνεια από την πρώτη.

11. Μία στρογγυλή μεμβράνη στον χώρο, βρίσκεται πάνω από το χωρίο $x^2 + y^2 \leq a^2$. Η μέγιστη συντεταγμένη z ενός σημείου της μεμβράνης είναι b. Υποθέτουμε ότι (x, y, z) είναι ένα σημείο της κεκλιμένης μεμβράνης. Δείξτε ότι το αντίστοιχο σημείο (r, θ, z) σε κυλινδρικές συντεταγμένες ικανοποιεί τις συνθήκες $0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, |z| \leq b$.

12. Μία δεξαμενή με σχήμα ορθού κυλίνδρου, ακτίνας 10 ποδών και ύψους 16 ποδών είναι μισογεμάτη και ακουμπάει στην πλευρά της. Περιγράψτε τον χώρο που καταλαμβάνει ο αέρας μέσα στη δεξαμενή, διαλέγοντας κατάλληλες κυλινδρικές συντεταγμένες.

13. Ενας παλμογράφος πρέπει να σχεδιαστεί έτσι ώστε να αντέχει στη θερμότητα που του μεταδίδει το σφαιρικό του περίβλημα διαμέτρου d, το οποίο θάβεται σε βάθος $d/3$ μέσα στη γη, και το προεξέχον μέρος του θερμαίνεται από τον ήλιο (υποθέτουμε ότι η γη είναι επίπεδη). Η ανάλυση της διάδοσης της θερμότητας απαιτεί να περιγραφεί με σφαιρικές συντεταγμένες το θαμμένο μέρος του περιβλήματος. Βρείτε τις.

14. Ενα στοιχείο φίλτρου λαδιού είναι ένας πορώδης ορθός κύλινδρος μέσα στον οποίο το λάδι διαχέεται από τον άξονα προς την εξωτερική καμπύλη επιφάνεια. Περιγράψτε το με κυλινδρικές συντεταγμένες, αν η διάμετρος του φίλτρου είναι 4,5 ίντσες, το ύψος του 5,6 ίντσες και το κέντρο του στοιχείου διαπερνάται από την κορυφή μέχρι κάτω, ώστε να δέχεται μια βίδα διαμέτρου $\frac{5}{8}$ ιντσών.

***15.** Περιγράψτε την επιφάνεια που δίνεται σε σφαιρικές συντεταγμένες από την $\rho = \cos 2\theta$.

1.5
n-Διάστατος Ευκλείδειος Χώρος

Στις Παραγράφους 1.1 και 1.2 μελετήσαμε τους χώρους $\mathbf{R} = \mathbf{R}^1, \mathbf{R}^2$ και $\mathbf{R}^3$ και δώσαμε γεωμετρικές ερμηνείες γι' αυτούς. Για παράδειγμα, μπορούμε να σκεφτόμαστε ένα σημείο (x, y, z) στον $\mathbf{R}^3$ σαν ένα γεωμετρικό αντικείμενο, συγκεκριμένα το κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα ή διάνυσμα που ξεκινάει από την αρχή των αξόνων και καταλήγει στο σημείο (x, y, z). Μπορούμε, λοιπόν, να φανταζόμαστε τον $\mathbf{R}^3$ με οποιονδήποτε από τους δύο τρόπους:

(i) Αλγεβρικά, σαν ένα σύνολο τριάδων (x, y, z), όπου x, y και z είναι πραγματικοί αριθμοί.

(ii) Γεωμετρικά, σαν ένα σύνολο κατευθυνόμενων ευθυγράμμων τμημάτων.

Αυτοί οι δύο τρόποι θεώρησης του $\mathbf{R}^3$ είναι ισοδύναμοι. Όταν θέλουμε να γενικεύσουμε, είναι ευκολώτερο να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό (i). Για να γίνουμε πιο σαφείς, μπορούμε να ορίσουμε τον $\mathbf{R}^n$, όπου n θετικός ακέραιος (πιθανόν μεγαλύτερος από 3), σαν το σύνολο όλων των διατεταγμένων n-άδων $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, όπου οι x_i είναι πραγματικοί αριθμοί. Για παράδειγμα, $(1, \sqrt{5}, 2, \sqrt{3}) \in \mathbf{R}^4$.

Το σύνολο $\mathbf{R}^n$ που ορίσαμε πιο πάνω είναι γνωστό σαν ο *Ευκλείδειος n-χώρος*, και τα στοιχεία του $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ είναι γνωστά σαν *διανύσματα* ή *n-διανύσματα*. Θέτοντας $n = 1, 2$, ή 3, παίρνουμε την ευθεία, το επίπεδο, και τον τρισδιάστατο χώρο αντίστοιχα.

Αρχίζουμε τη μελέτη μας του Ευκλείδειου n-χώρου, ορίζοντας μερικές αλγεβρικές πράξεις. Είναι οι ανάλογες αυτών που ορίστηκαν στην Παράγραφο 1.1 για τον $\mathbf{R}^2$ και τον $\mathbf{R}^3$. Οι πρώτες δύο, πρόσθεση και αριθμητικός πολλαπλασιασμός, ορίζονται ως εξής:

(i) $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$· και

(ii) για κάθε πραγματικό αριθμό α,

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Η γεωμετρική σημασία αυτών των πράξεων στον $\mathbf{R}^2$ και τον $\mathbf{R}^3$ συζητήθηκε στην Παράγραφο 1.1.

Τα n διανύσματα $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ ονομάζονται *συνήθη βασικά διανύσματα* του $\mathbf{R}^n$, και γενικεύουν τα τρία, ανά δύο ορθογώνια, μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ του $\mathbf{R}^3$. Το διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ μπορεί να γραφεί $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$.

Για δύο διανύσματα $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ και $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ στον $\mathbf{R}^3$, ορίσαμε το *εσωτερικό γινόμενο* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ σαν τον αριθμό $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Αυτός ο ορισμός επεκτείνεται εύκολα στον $\mathbf{R}^n$· συγκεκριμένα, αν $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, ορίζουμε $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$. Στον $\mathbf{R}^n$, χρησιμοποιούμε συχνά το συμβολισμό $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >$ αντί του $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ για το εσωτερικό γινόμενο. Κατ' αναλογία με τον $\mathbf{R}^3$, οδηγούμαστε να ορίσουμε την αφηρημένη έννοια του *μήκους* ή *νόρμας* ενός διανύσματος $\mathbf{x}$ μέσω του τύπου

$$\text{μήκος του } \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Αν $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ είναι δύο διανύσματα στο επίπεδο ($\mathbf{R}^2$) ή στο χώρο ($\mathbf{R}^3$), τότε ξέρουμε ότι η μεταξύ τους γωνία δίνεται από τη σχέση

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{||\mathbf{x}||\ ||\mathbf{y}||}.$$

Το δεξιό μέλος αυτής της ισότητας ορίζεται στον $\mathbf{R}^n$ το ίδιο καλά όπως και στον $\mathbf{R}^2$. Πάλι παριστάνει το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$· αυτή η γωνία ορίζεται καλά, αφού το $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ βρίσκονται σ' ένα διδιάστατο υπόχωρο του $\mathbf{R}^n$ (το επίπεδο που ορίζεται από τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$). Το εσωτερικό γινόμενο είναι πολύ ισχυρό μαθηματικό εργαλείο: ένας λόγος γι' αυτό είναι το ότι ενσωματώνει τη γεωμετρική έννοια της γωνίας μεταξύ δύο διανυσμάτων.

Θα φανεί χρήσιμο να έχουμε στη διάθεσή μας μερικές αλγεβρικές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου. Τις συνοψίζουμε στο επόμενο θεώρημα (δείτε τις ιδιότητες (i), (ii), (iii) και (iv) της Παραγράφου 1.2).

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Αν $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ και α, β πραγματικοί αριθμοί, έχουμε

(i) $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})\cdot\mathbf{z} = \alpha(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}\cdot\mathbf{z})$.
(ii) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{x}$.
(iii) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} \geq 0$.
(iv) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{x} = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Καθένας από τους τέσσερις ισχυρισμούς αποδεικνύεται με απλό υπολογισμό. Για παράδειγμα, για να αποδείξουμε την ιδιότητα (i) γράφουμε

$$\begin{aligned}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})\cdot\mathbf{z} &= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n)\cdot(z_1, z_2, \ldots, z_n)\\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2)z_2 + \cdots + (\alpha x_n + \beta y_n)z_n\\ &= \alpha x_1 z_1 + \beta y_1 z_1 + \alpha x_2 z_2 + \beta y_2 z_2 + \cdots + \alpha x_n z_n + \beta y_n z_n\\ &= \alpha(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}).\end{aligned}$$

Οι άλλες αποδείξεις είναι όμοιες. ■

Στην Παράγραφο 1.2 αποδείξαμε μία πολύ πιο ενδιαφέρουσα ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου, τη λεγόμενη ανισότητα Cauchy-Schwarz (μερικές φορές λέγεται και ανισότητα Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz, ή απλώς ανισότητα CBS, γιατί ανακαλύφθηκε σε ειδικές περιπτώσεις ανεξάρτητα, από τον Γάλλο μαθηματικό Cauchy, τον Ρώσσο μαθηματικό Bunyakovskii και τον Γερμανό μαθηματικό Schwarz). Για τον $\mathbf{R}^2$ η απόδειξή μας απαιτούσε τη χρήση του νόμου των συνημιτόνων. Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο και για τον $\mathbf{R}^n$, περιορίζοντας την προσοχή μας σ' ένα επίπεδο στον $\mathbf{R}^n$. Μπορούμε, όμως, να δώσουμε και μία άμεση, τελείως αλγεβρική απόδειξη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 (ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ CAUCHY-SCHWARZ) Εστω $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ διανύσματα στον $\mathbf{R}^n$. Τότε

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leq ||\mathbf{x}||\ ||\mathbf{y}||.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θέτουμε $a = \mathbf{y}\cdot\mathbf{y}$ και $b = -\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$. Αν $a = 0$, το θεώρημα αληθεύει κατά προφανή τρόπο, γιατί τότε $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ και τα δύο μέλη της ανισότητας μηδενίζονται. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $a \neq 0$. Από το Θεώρημα 2 έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \leq (a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) \cdot (a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) &= a^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 2ab\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + b^2\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - (\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2. \end{aligned}$$

Μία διαίρεση με $\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}$ δίνει

$$0 \leq (\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2$$

ή

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}) = ||\mathbf{x}||^2\, ||\mathbf{y}||^2$$

Παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες και στα δύο μέλη αυτής της ανισότητας, καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

Υπάρχει μια πολύ χρήσιμη συνέπεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz που αφορά τα μήκη. Η τριγωνική ανισότητα είναι γεωμετρικά σαφής στον $\mathbf{R}^3$. Στο Σχήμα 1.5.1, $||\mathrm{OQ}|| = ||\mathbf{x} + \mathbf{y}||$, $||\mathrm{OP}|| = ||\mathbf{x}|| = ||\mathrm{RQ}||$, και $||\mathrm{OR}|| = ||\mathbf{y}||$. Δεδομένου ότι το άθροισμα των μηκών δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μήκους της τρίτης, έχουμε $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$. Η περίπτωση του $\mathbf{R}^n$ δεν είναι το ίδιο φανερή, γι' αυτό θα δώσουμε την αναλυτική απόδειξη.

ΠΟΡΙΣΜΑ Εστω $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ διανύσματα στον $\mathbf{R}^n$. Τότε

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \qquad \text{(τριγωνική ανισότητα).}$$

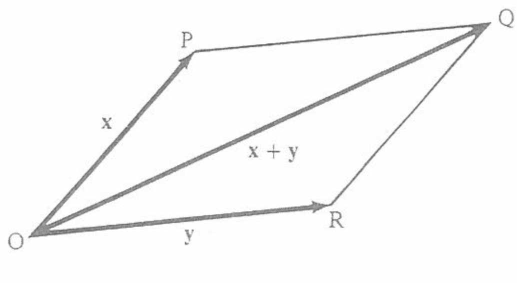
ΑΠΟΔΕΙΞΗ Από το Θεώρημα 3, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq ||\mathbf{x}||\, ||\mathbf{y}||$, επομένως

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + ||\mathbf{y}||^2 \leq ||\mathbf{x}||^2 + 2||\mathbf{x}||\, ||\mathbf{y}|| + ||\mathbf{y}||^2.$$

Επομένως, $||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 \leq (||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||)^2$· παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες έχουμε το ζητούμενο. ■

Αν γράψουμε σε αλγεβρική μορφή το Θεώρημα 3 και το πόρισμά του, καταλήγουμε στις εξής χρήσιμες ανισότητες:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$



Σχήμα 1.5.1 Το σχήμα αυτό δείχνει ότι $||\mathrm{OQ}|| \leq ||\mathrm{OR}|| + ||\mathrm{RQ}||$, ή, σε διανυσματικό συμβολισμό, ότι $||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$, που είναι η τριγωνική ανισότητα.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{1/2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Εστω $\mathbf{x} = (1,2,0,-1)$ και $\mathbf{y} = (-1,1,1,0)$. Επαληθεύστε το Θεώρημα 3 και το πόρισμά του σ' αυτή την περίπτωση:

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned}
||\mathbf{x}|| &= \sqrt{1^2+2^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{6} \\
||\mathbf{y}|| &= \sqrt{(-1)^2+1^2+1^2+0^2} = \sqrt{3} \\
\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} &= 1(-1)+2\cdot 1+0\cdot 1+(-1)0 = 1 \\
\mathbf{x}+\mathbf{y} &= (0,3,1,-1) \\
||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| &= \sqrt{0^2+3^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{11}.
\end{aligned}$$

Υπολογίζοντας $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 1 \le 4.24 \approx \sqrt{6}\sqrt{3} = ||\mathbf{x}||\ ||\mathbf{y}||$, άρα το θεώρημα 3 επαληθεύεται. Ομοια, μπορούμε να ελέγξουμε το πόρισμά του:

$$\begin{aligned}
||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| &= \sqrt{11} \approx 3,32 \le 4,18 \\
&= 2,45+1,73 \approx \sqrt{6}+\sqrt{3} = ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||. \ \square
\end{aligned}$$

Κατ' αναλογίαν προς το $\mathbf{R}^3$, ορίζουμε την έννοια της απόστασης στον $\mathbf{R}^n$. Συγκεκριμένα, αν $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ είναι δύο σημεία στον $\mathbf{R}^n$, η *απόσταση* ανάμεσα στο $\mathbf{x}$ και το $\mathbf{y}$ ορίζεται να είναι $||\mathbf{x}-\mathbf{y}||$, το μήκος δηλαδή του διανύσματος $\mathbf{x}-\mathbf{y}$. Σημειώνουμε ότι δεν ορίζεται *εξωτερικό γινόμενο* στον $\mathbf{R}^n$ παρά μόνο στην περίπτωση $n = 3$. Μόνο η έννοια του εσωτερικού γινομένου γενικεύεται.

Γενικεύοντας τους πίνακες 2×2 και 3×3 (δείτε την Παράγραφο 1.3), μπορούμε να μελετήσουμε πίνακες $m\times n$, (mn αριθμούς σε τετραγωνική διάταξη):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε για τον A και τον συμβολισμό $[a_{ij}]$. Ορίζουμε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με βαθμωτό μέγεθος κατά συντεταγμένη, όπως ακριβώς κάναμε και για τα διανύσματα. Αν μας δώσουν δύο $m\times n$ πίνακες A και B, μπορούμε να τους προσθέσουμε (αφαιρέσουμε) και να πάρουμε έναν νέο $m\times n$ πίνακα $C = A+B (C = A-B)$, του οποίου η ij συντεταγμένη, c_{ij}, είναι το άθροισμα (διαφορά) των a_{ij} και b_{ij}. Είναι φανερό ότι $A+B = B+A$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$

(b) $[1\ \ 2] + [0\ \ -1] = [1\ \ 1].$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \ \square$

Αν μας δώσουν ένα βαθμωτό μέγεθος λ και έναν $m \times n$ πίνακα A, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τον A με λ και να πάρουμε έναν νέο $m \times n$ πίνακα $\lambda A = C$, του οποίου η ij συντεταγμένη c_{ij} είναι το γινόμενο λa_{ij}.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

$$3\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 15 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}. \ \square$$

Στη συνέχεια ορίζουμε το γινόμενο πινάκων. Αν $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, τότε οι συντεταγμένες του $AB = C$ δίνονται από την

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο της i-γραμμής του A και της j-στήλης του B:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right]. \ \square$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε έναν πίνακα $n \times m$ (n γραμμές, m στήλες) μ' έναν πίνακα $m \times p$ (m γραμμές, p στήλες), με αποτέλεσμα έναν πίνακα $n \times p$ (n γραμμές, p στήλες) ακολουθώντας τον ίδιο κανόνα. Σημειώστε ότι για να ορίζεται ο AB, το πλήθος των στηλών του A πρέπει να είναι το ίδιο με το πλήθος των γραμμών του B.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Εστω

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

και ο BA δεν ορίζεται. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Εστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = [2 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 2].$$

Τότε

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad BA = [13]. \; \square$$

Κάθε $m \times n$ πίνακας A προσδιορίζει μια απεικόνιση του $\mathbf{R}^n$ στον $\mathbf{R}^m$ με τον ακόλουθο τρόπο: Εστω $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Θεωρούμε τον $n \times 1$ πίνακα-στήλη που ορίζει το $\mathbf{x}$, τον οποίο συμβολίζουμε *προσωρινά* $\mathbf{x}^T$:

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

και πολλαπλασιάζουμε τον A με τον $\mathbf{x}^T$ (θεωρούμενο σαν πίνακα $n \times 1$)· παίρνουμε έτσι έναν νέο πίνακα $m \times 1$:

$$A\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Καταλήγουμε έτσι σ' ένα διάνυσμα $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_m)$. Για να ορίσουμε, χρησιμοποιώντας έναν πίνακα A, μια απεικόνιση διανυσμάτων $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ σε διανύσματα $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_m)$ με βάση την προηγούμενη εξίσωση, πρέπει να γράφουμε τα διανύσματα στη μορφή στήλης $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ αντί της μορφής γραμμής $(x_1, \cdots, x_n)$. Αυτή η ξαφνική αλλαγή του τρόπου γραφής του $\mathbf{x}$, από γραμμή σε στήλη, είναι υποχρεωτική από τις καθιερωμένες συμβάσεις για τον πολλαπλασιασμό.* Ετσι, αν και υπάρχει περίπτωση να προκληθεί κάποια σύγχυση, θα γράφουμε τα $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ και $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_m)$ σαν διανύσματα-στήλες $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$, όταν εμπλέκονται σε πολλαπλασιασμό πινάκων· δηλαδή θα *ταυτίζουμε* αυτές τις δύο μορφές γραφής διανυσμάτων. Θα παραλείπουμε λοιπόν το T από το $\mathbf{x}^T$ και δεν θα κάνουμε καμμία διάκριση ανάμεσα στα $\mathbf{x}^T$ και $\mathbf{x}$. Δηλαδή, $\mathbf{x} = \mathbf{x}^T$.

---

* Αν οι μαθηματικοί είχαν υιοθετήσει τη σύμβαση να γράφουν $\mathbf{x}A$ αντί για $A\mathbf{x}$, ή είχαν διαφορετικούς νόμους για τον πολλαπλασιασμό πινάκων, το $\mathbf{x}$ θα παρέμενε διάνυσμα-γραμμή.

Άρα, η $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ θα σημαίνει "στην πραγματικότητα" το εξής: Γράψτε το $\mathbf{x}$ σαν διάνυσμα στήλη, πολλαπλασιάστε το με τον A και θεωρήστε το διάνυσμα $\mathbf{y}$ που έχει συντεταγμένες αυτές του διανύσματος στήλης που προκύπτει. Ο κανόνας $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ ορίζει τότε μια απεικόνιση του $\mathbf{R}^n$ στον $\mathbf{R}^m$. Αυτή η απεικόνιση είναι γραμμική. Ικανοποιεί δηλαδή τις

$$A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$$
$$A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(A\mathbf{x}), \qquad \text{όπου } \alpha \text{ βαθμωτό μέγεθος,}$$

όπως μπορείτε εύκολα να επιβεβαιώσετε. Οπως μαθαίνει κανείς σ' ένα μάθημα γραμμικής άλγεβρας, αντίστροφα, κάθε γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbf{R}^n$ στον $\mathbf{R}^m$ αναπαριστάνεται μ' αυτόν τον τρόπο από έναν πίνακα $m \times n$.

Αν $A = [a_{ij}]$ είναι ένας πίνακας $m \times n$ και $\mathbf{e}_j$ είναι το j-στό διάνυσμα της συνηθισμένης βάσης του $\mathbf{R}^n$, τότε το $A\mathbf{e}_j$ είναι ένα διάνυσμα στον $\mathbf{R}^m$ με συντεταγμένες αυτές της j-στής στήλης του A. Δηλαδή η i-στή συντεταγμένη του $A\mathbf{e}_j$ είναι ίση με a_{ij}. Συμβολικά, $(A\mathbf{e}_j)_i = a_{ij}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

τότε $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ είναι η απεικόνιση του $\mathbf{R}^3$ στον $\mathbf{R}^4$ που ορίζεται από την

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 + 3x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}. \quad \square$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 Το επόμενο παράδειγμα εξηγεί τί συμβαίνει σ' ένα συγκεκριμένο σημείο, όταν αυτό απεικονίζεται μέσω ενός πίνακα 4×3:

$$A\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{η 2η στήλη του A.} \quad \square$$

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι, γενικά, *αντιμεταθετικός*: αν A και B είναι πίνακες $n \times n$, τότε γενικά

$$AB \neq BA$$

(δείτε τα Παραδείγματα 4, 5 και 6).

Ενας πίνακας $n \times n$ λέγεται *αντιστρέψιμος* αν υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας B τέτοιος, ώστε

$$AB = BA = I_n,$$

όπου

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

είναι ο ταυτοτικός πίνακας $n \times n$: ο I_n έχει την ιδιότητα ότι $I_n C = C I_n = C$ για κάθε $n \times n$ πίνακα C. Συμβολίζουμε τον B με A^{-1} και λέμε ότι ο A^{-1} είναι ο *αντίστροφος* του A. Ο αντίστροφος, όταν υπάρχει, είναι μοναδικός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 Αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{τότε} \qquad A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ -6 & 12 & 4 \end{bmatrix},$$

αφού $AA^1 = I_3 = A^{-1}A$, όπως μπορεί κανείς να ελέγξει με πολλαπλασιασμό πινάκων. □

Στη Γραμμική Άλγεβρα μαθαίνουμε μεθόδους για τον υπολογισμό του αντίστροφου ενός πίνακα· δεν θα χρειαστούμε αυτές τις μεθόδους σ' αυτό το βιβλίο. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ως προς το διάνυσμα $\mathbf{x}$, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με τον A^{-1}, οπότε $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$.

Στην Παράγραφο 1.3 ορίσαμε την ορίζουσα ενός πίνακα 3×3. Αυτός ο ορισμός γενικεύεται με επαγωγή και στις ορίζουσες $n \times n$. Θα εξηγήσουμε εδώ πώς γράφεται η ορίζουσα ενός πίνακα 4×4 με τη βοήθεια των οριζουσών πινάκων 3×3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

(δείτε τον τύπο (2) της Παραγράφου 1.3· τα πρόσημα εναλλάσσονται $+, -, +, -, \ldots$).

Οι βασικές ιδιότητες των οριζουσών 3×3, όπως τις ανακεφαλαιώσαμε στην Παράγραφο 1.3, εξακολουθούν να ισχύουν και για τις ορίζουσες $n\times n$. Ειδικότερα, σημειώνουμε το γεγονός ότι αν A είναι ένας πίνακας $n \times n$ και B είναι ο πίνακας που θα σχηματιστεί αν προσθέσουμε ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο της k-γραμμής (ή στήλης) του A στην l-γραμμή (ή, αντίστοιχα, στήλη) του A, τότε η ορίζουσα του A είναι ίση με την ορίζουσα του B (δείτε το Παράδειγμα 10 πιο κάτω).

Ενα βασικό θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας μας λέει ότι ένας $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ορίζουσα του A δεν είναι ίση με μηδέν. Μια άλλη βασική ιδιότητα είναι ότι $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. Σ' αυτό το βιβλίο δεν θα χρησιμοποιήσουμε τη γραμμική άλγεβρα σ' όλες της τις λεπτομέρειες, γι' αυτό θα δεχτούμε αυτούς τους ισχυρισμούς χωρίς απόδειξη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 Εστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε την $\det A$. Εχει ο A αντίστροφο;

ΛΥΣΗ Προσθέτοντας $(-1)\times$πρώτη στήλη στην τρίτη στήλη, παίρνουμε

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Προσθέτοντας $(-1)\times$πρώτη στήλη στην τρίτη στήλη αυτής της ορίζουσας 3×3 παίρνουμε

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Άρα, $\det A = -2 \neq 0$, και ο A έχει αντίστροφο. □

Αν μας δώσουν τρεις πίνακες, A, B και C τέτοιους ώστε τα γινόμενα AB και BC να ορίζονται, τότε τα γινόμενα $(AB)C$ και $A(BC)$ ορίζονται και είναι ίσα (δηλαδή, ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι προσεταιριστική πράξη). Αυτό το γινόμενο λέγεται *τριπλό γινόμενο* των πινάκων, και συμβολίζεται με ABC.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11 Εστω

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad B = [1 \ \ 1], \qquad \text{και} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$ABC = A(BC) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot [3] = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix}. \ \square$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \ \square$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αποδείξτε τις ιδιότητες (ii) ώς (iv), όπως διατυπώνονται στο Θεώρημα 2.

2. Στον $\mathbf{R}^n$ δείξτε ότι:
(a) $2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$ (αυτή η ταυτότητα είναι γνωστή σαν ο κανόνας του παραλληλογράμμου)
(b) $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\,\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$
(c) $4 < \mathbf{x}, \mathbf{y} >= \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$ (αυτή είναι η ταυτότητα "πολώσεως" (polarization)).

Ερμηνεύστε γεωμετρικά αυτά τα αποτελέσματα με τη βοήθεια του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$.

Επαληθεύστε την ανισότητα CBS και την τριγωνική ανισότητα για τα διανύσματα των Ασκήσεων 3, 4 και 5:

3. $\mathbf{x} = (2, 0, -1), \mathbf{y} = (4, 0, -2)$

4. $\mathbf{x} = (1, 0, 2, 6), \mathbf{y} = (3, 8, 4, 1)$

5. $\mathbf{x} = (1, -1, 1, -1, 1), \mathbf{y} = (3, 0, 0, 0, 2)$

6. Επαληθεύστε ότι αν A είναι ένας πίνακας $n \times n$, η απεικόνιση $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ του $\mathbf{R}^n$ στον $\mathbf{R}^n$ είναι γραμμική.

7. Υπολογίστε τον AB, την $\det A$, την $\det B$, τον $A + B$ και την $\det(A+B)$ για τους

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. Υπολογίστε τον AB, την $\det A$, την $\det B$, την $\det(AB)$ και την $\det(A+B)$ για τους

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Χρησιμοποιήστε επαγωγή ως προς k για να δείξετε ότι αν $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$, τότε

$$\|\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\| \le \|\mathbf{x}_1\| + \ldots + \|\mathbf{x}_k\|.$$

10. Αποδείξτε με χρήση άλγεβρας την *ταυτότητα του Lagrange*: Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $x_1, \ldots, x_n$ και $y_1, \ldots, y_n$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \sum_{i<j}(x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

Χρησιμοποιώντας την, δώστε διαφορετική απόδειξη της ανισότητας Cauchy-Schwarz στον $\mathbf{R}^n$.

***11.** Δείξτε ότι αν A είναι ένας πίνακας $n \times n$, τότε
(a) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ και
(b) αν B είναι ο πίνακας που παίρνουμε από τον A πολλαπλασιάζοντας οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη του με έναν αριθμό λ, τότε $\det B = \lambda \det A$.

Στις Ασκήσεις 12, 13 και 14, με A, B και C συμβολίζουμε πίνακες $n \times n$.

12. Είναι σωστό ότι $\det(A+B) = \det A + \det B$; Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.

13. Είναι σωστό ότι $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$;

14. Θεωρώντας γνωστή την $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, αποδείξτε ότι $\det(ABC) = (\det A)(\det B)(\det C)$.

***15.** (Η άσκηση αυτή προϋποθέτει κάποια γνώση ολοκλήρωσης συνεχών συναρτήσεων μιας μεταβλητής.) Σημειώνουμε ότι η απόδειξη της ανισότητας CBS (Θεώρημα 3) στηρίζεται μόνο στις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου που καταγράφονται στο Θεώρημα 2. Χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση, αποδείξτε την παρακάτω ανισότητα για συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [0, 1] \to \mathbf{R}$:

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_0^1 [f(x)]^2 dx}\sqrt{\int_0^1 [g(x)]^2 dx}.$$

Για την απόδειξη
(a) βεβαιωθείτε ότι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων από το [0, 1] στο $\mathbf{R}$ μπορεί να γίνει διανυσματικός χώρος· δηλαδή, μπορούμε να σκεφτόμαστε τις συναρτήσεις f, g αφηρημένα σαν "διανύσματα" που προστίθενται το ένα στο άλλο και πολλαπλασιάζονται με βαθμωτά μεγέθη.
(b) ορίστε το εσωτερικό γινόμενο δύο συναρτήσεων μέσω της

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

και επαληθεύστε ότι ικανοποιεί τις συνθήκες (i) ώς (iv) του Θεωρήματος 2.

***16.** Ορίζουμε τον ανάστροφο A^T ενός $n \times n$ πίνακα A ως εξής: η ij-συντεταγμένη του A^T είναι a_{ji}, όπου a_{ij} είναι η ij-συντεταγμένη του A. Δείξτε ότι ο A^T χαρακτηρίζεται από την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ στον $\mathbf{R}^n$,

$$(A^T\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y}).$$

17. Επαληθεύστε ότι ο αντίστροφος του

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{είναι ο} \quad \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

18. Χρησιμοποιώντας την απάντησή σας στην Ασκηση 17, δείξτε ότι η λύση του συστήματος.*

$$ax + by = e$$
$$cx + dy = f$$

είναι

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-dc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

19. Δεχόμενοι την ισότητα

$$\det(AB) = (\det A)(\det B),$$

βεβαιωθείτε ότι $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$ και συμπεράνετε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $\det A \neq 0$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

1. Εστω $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ και $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Υπολογίστε τα $\mathbf{v}+\mathbf{w}, 3\mathbf{v}, 6\mathbf{v}+8\mathbf{w}, -2\mathbf{v}, \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}, \mathbf{v}\times\mathbf{w}$. Δώστε γεωμετρική ερμηνεία σε κάθε μία από τις πράξεις, σχεδιάζοντας τα διανύσματα.

2. Επαναλάβετε την Ασκηση 1 με $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ και $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

3. (a) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το $(-1, 2, 1)$ και έχει τη διεύθυνση του $\mathbf{j}$.
(b) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα $(0, 2, -1)$ και $(-3, 1, 0)$.
(c) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στο $(-2, 1, 2)$ και περνάει από το $(-1, 1, 3)$.

4. (a) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το $(0, 1, 0)$ και έχει τη διεύθυνση του $3\mathbf{i}+\mathbf{k}$.
(b) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα $(0, 1, 1)$ και $(0, 1, 0)$.
(c) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στο $(-1, 1, -1)$ και περνάει από το $(1, 1, 1)$.

5. Υπολογίστε το $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ για τα επόμενα ζεύγη διανυσμάτων.
(a) $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{w} = \mathbf{k}$.
(b) $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{w} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$.
(c) $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{w} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

6. Υπολογίστε το $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ για τα ζεύγη διανυσμάτων της Ασκησης 5.

7. Βρείτε το συνημίτονο της γωνίας ανάμεσα στα ζεύγη διανυσμάτων της Ασκησης 5.

8. Βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα διανύσματα της Ασκησης 5.

9. Χρησιμοποιώντας διανυσματικό συμβολισμό περιγράψτε το τρίγωνο (στο χώρο) που έχει σαν κορυφές την αρχή των αξόνων και τα τελικά σημεία των διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

10. Δείξτε ότι τρία διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν υπάρχουν τρεις πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

11. Αν $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ πραγματικοί αριθμοί, δείξτε ότι

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

12. Εστω $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ μοναδιαία διανύσματα, ορθογώνια ανά δύο. Αν $a = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}$, δείξτε ότι

* (Σ.τ.Ε.) Εννοείται ότι αναφέρεται στον πίνακα της Άσκησης 17, δηλαδή $ad-bc\neq0$.

$$\alpha = \mathbf{a}\cdot\mathbf{u}, \qquad \beta = \mathbf{a}\cdot\mathbf{v}, \qquad \gamma = \mathbf{a}\cdot\mathbf{w}.$$

Δώστε τη γεωμετρική περιγραφή αυτού του αποτελέσματος.

13. Έστω $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ δύο διανύσματα στο επίπεδο, $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$ και λ ένας πραγματικός αριθμός. Δείξτε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}+\lambda\mathbf{a}$ είναι ίσο με αυτού που ορίζεται από τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$. Κάντε σχήμα. Συσχετίστε το αποτέλεσμα αυτό με μια γνωστή ιδιότητα των οριζουσών.

14. Βρείτε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που έχει κορυφές τα (0, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 2, 0), (3, 1, 2).

15. Για δοθέντα μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ στον $\mathbf{R}^3$, δείξτε ότι το διάνυσμα $\mathbf{v} = \|\mathbf{a}\|\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|\mathbf{a}$ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

16. Χρησιμοποιώντας διανυσματικές μεθόδους, δείξτε ότι η απόσταση του σημείου (x_1, y_1) από την ευθεία $ax + by = c$ είναι

$$\frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

17. Βεβαιωθείτε ότι η διεύθυνση του $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού, επιλέγοντας σαν $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ δύο από τα διανύσματα $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$.

18. (a) Υποθέτουμε ότι $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}$ για κάθε $\mathbf{b}$. Δείξτε ότι $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$.
(b) Υποθέτουμε ότι $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{a}'\times\mathbf{b}$ για κάθε $\mathbf{b}$. Είναι αλήθεια ότι $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$;

19. (a) Χρησιμοποιώντας διανυσματικές μεθόδους, δείξτε ότι η απόσταση ανάμεσα σε δύο μη παράλληλες ευθείες l_1 και l_2 δίνεται από την

$$d = \frac{|(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\cdot(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)|}{\|\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2\|},$$

όπου $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ είναι τυχαία σημεία των l_1 και l_2 αντίστοιχα, ενώ $\mathbf{a}_1$ και $\mathbf{a}_2$ είναι οι διευθύνσεις των l_1 και l_2. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Θεωρήστε το επίπεδο που περιέχει την l_1 και είναι παράλληλο στην l_2. Δείξτε ότι το $(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)/\|\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2\|$ είναι μοναδιαίο κάθετο γι' αυτό το επίπεδο· τώρα, προβάλετε το $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ σ' αυτή την κάθετη διεύθυνση.]

(b) Βρείτε την απόσταση ανάμεσα στην ευθεία l_1 που ορίζεται από τα σημεία $(-1, -1, 1)$ και (0, 0, 0) και την ευθεία l_2 που ορίζεται από τα σημεία $(0, -2, 0)$ και (2, 0, 5).

20. Δείξτε ότι δύο επίπεδα που ορίζονται από τις εξισώσεις $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ και $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ είναι παράλληλα και ότι η απόσταση ανάμεσα σε δύο τέτοια επίπεδα είναι

$$\frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

21. (a) Αποδείξτε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου στο επίπεδο με κορυφές (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) είναι η απόλυτη τιμή του

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

(b) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $(1, 2), (0, 1), (-1, 1)$.

22. Μετατρέψτε τα παρακάτω σημεία από Καρτεσιανές σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες και σχεδιάστε τα:
(a) $(0, 3, 4)$ (b) $(-\sqrt{2}, 1, 0)$
(c) $(0, 0, 0)$ (d) $(-1, 0, 1)$
(e) $(-2\sqrt{3}, -2, 3)$

23. Μετατρέψτε τα παρακάτω σημεία από κυλινδρικές σε Καρτεσιανές και σφαιρικές συντεταγμένες και σχεδιάστε τα:
(a) $(1, \pi/4, 1)$ (b) $(3, \pi/6, -4)$
(c) $(0, \pi/4, 1)$ (d) $(2, -\pi/2, 1)$
(e) $(-2, -\pi/2, 1)$

24. Μετατρέψτε τα παρακάτω σημεία από σφαιρικές σε Καρτεσιανές και κυλινδρικές συντεταγμένες και σχεδιάστε τα:
(a) $(1, \pi/2, \pi)$ (b) $(2, -\pi/2, \pi/6)$*
(c) $(0, \pi/8, \pi/35)$ (d) $(2, -\pi/2, -\pi)$*
(e) $(-1, \pi, \pi/6)$*

25. Ξαναγράψτε την εξίσωση $z = x^2 - y^2$, χρησιμοποιώντας κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

26. Κάνοντας χρήση σφαιρικών συντεταγμένων, δείξτε ότι

* (Σ.τ.Ε.) (b) ή $\theta=3\pi/2$... κ.λπ., (d) ή $\theta=3\pi/2$, $\varphi=\pi$, κ.λπ., (e) βλ. Άσκηση 5 της Παραγράφου 1.4.

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{u}\|}\right)$$

όπου $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία.

27. Επαληθεύστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την τριγωνική ανισότητα για τα

$$\mathbf{x} = (3, 2, 1, 0) \quad \text{και} \quad \mathbf{y} = (1, 1, 1, 2).$$

28. Πολλαπλασιάστε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Είναι $AB = BA$;

29. (a) Δείξτε ότι αν A και B είναι δύο πίνακες $n \times n$, και $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$,

$$(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}).$$

(b) Τί συμπεραίνετε από την ισότητα του ερωτήματος (a) για τη σχέση ανάμεσα στη σύνθεση των απεικονίσεων $\mathbf{x} \to B\mathbf{x}, \mathbf{y} \to A\mathbf{y}$ και τον πολλαπλασιασμό πινάκων;

30. Βρείτε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που παράγουν τα διανύσματα

$$(1, 0, 1) \quad (1, 1, 1), \quad \text{και} \quad (-3, 2, 0).$$

31. Επαληθεύστε ότι κάθε γραμμική απεικόνιση του $\mathbf{R}^n$ στον $\mathbf{R}^n$ καθορίζεται από έναν πίνακα $n \times n$ με τον τρόπο που περιγράφηκε αμέσως μετά το Παράδειγμα 6.

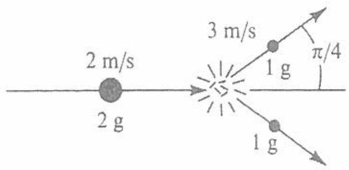
32. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περιέχει το $(3, -1, 2)$ και την ευθεία $\mathbf{v} = (2, -1, 0) + t(2, 3, 0)$.

33. Το έργο W που παράγεται όταν ένα αντικείμενο μετακινείται από το (0, 0) στο (7, 2) υπό την επίδραση μιας δύναμης $\mathbf{F}$ είναι $W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}$, όπου r είναι το διάνυσμα με αρχή το (0, 0) και τέλος το (7, 2). (Οι μονάδες είναι πόδια και λίμπρες.)

(a) Ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{F} = 10\cos\theta\mathbf{i} + 10\sin\theta\mathbf{j}$. Βρείτε το W σαν συνάρτηση του θ.

(b) Ας υποθέσουμε ότι η δύναμη $\mathbf{F}$ έχει μέτρο 6 lb και σχηματίζει γωνία $\pi/6$ rad με τον οριζόντιο άξονα, με φορά προς τα δεξιά. Βρείτε το W (σε πόδια×λίμπρες).

34. Αν ένα σώμα μάζας m κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}$, η *ορμή* του είναι $p = m\mathbf{v}$. Σ' ένα παιχνίδι με βώλους, ένας βώλος μάζας 2 γραμμαρίων(g) πετάγεται με ταχύτητα 2 μέτρων το δευτερόλεπτο (m/s), χτυπάει δύο βώλους που έχουν μάζα 1g ο καθένας, και σταματάει. Ο ένας βώλος εκτινάσσεται με ταχύτητα 3 m/sec και με γωνία 45° προς τη διεύθυνση που είχε ο μεγαλύτερος βώλος τη στιγμή της πρόσκρουσης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.Ε.1. Υποθέτοντας ότι η συνολική ορμή πριν και μετά την κρούση είναι η ίδια (σύμφωνα με το νόμο διατήρησης της ορμής), βρείτε με ποιά γωνία και ταχύτητα θα κινηθεί ο δεύτερος βώλος.



Σχήμα 1.Ε.1 Ορμή και βώλοι.

35. Δείξτε ότι για κάθε x, y, z,

$$\begin{vmatrix} x+2 & y & z \\ z & y+1 & 10 \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x+2 & z \\ -1 & z-x-2 & 10-z \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

36. Δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

αν τα x, y και z είναι διαφορετικά ανά δύο.

37. Δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} 66 & 628 & 246 \\ 88 & 435 & 24 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 68 & 627 & 247 \\ 86 & 436 & 23 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

38. Δείξτε ότι η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ n+3 & n+4 & n+5 \\ n+6 & n+7 & n+8 \end{vmatrix}$$

έχει την ίδια τιμή, όποιο κι αν είναι το n. Ποιά είναι αυτή η τιμή;

* (Σ.τ.Ε.) Εξυπακούεται ότι για αρνητικές τιμές παίρνουμε την απόλυτη τιμή.

39. Ο όγκος ενός τετραέδρου του οποίου οι ακμές $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ έχουν ένα κοινό άκρο, δίνεται από την $V = \frac{1}{6}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.*

(a) Εκφράστε τον όγκο στη μορφή ορίζουσας.

(b) Υπολογίστε το V όταν $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Χρησιμοποιήστε τον παρακάτω ορισμό για τα προβλήματα 40 και 41: Αν τα διανύσματα $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ έχουν αρχή το 0 και καταλήγουν στις μάζες $m_1, \ldots, m_n$, το κέντρο βάρους είναι το διάνυσμα

$$\mathbf{c} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i\right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right).$$

40. Δίνεται ένα τετράεδρο σε συντεταγμένες xyz με μία κορυφή το (0, 0, 0) και τις τρείς ακμές του, που συναντώνται στο (0, 0, 0), να συμπίπτουν με τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

(a) Κάντε ένα σχήμα και ονομάστε τα τελικά σημεία των διανυσμάτων $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

(b) Βρείτε το κέντρο βάρους καθεμιάς από τις τέσσερις τριγωνικές έδρες του τετραέδρου, αν τοποθετήσουμε μια μοναδιαία μάζα σε κάθε κορυφή του.

41. Δείξτε ότι για κάθε διάνυσμα $\mathbf{r}$, το κέντρο βάρους ενός συστήματος ικανοποιεί την

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \|\mathbf{r}_i-\mathbf{c}\|^2 + m\|\mathbf{r}-\mathbf{c}\|^2,$$

όπου $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ είναι η συνολική μάζα του συστήματος.

Στις Ασκήσεις 42 ώς 47, βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα που να έχει τη δοσμένη ιδιότητα.

42. Να είναι παράλληλο στην ευθεία $x = 3t+1, y = 16t-2, z = -(t+2)$.

43. Να είναι κάθετο στο επίπεδο $x - 6y + z = 12$.

44. Να είναι παράλληλο στα επίπεδα $8x+y+z = 1$ και $x - y - z = 0$.

45. Να είναι ορθογώνιο προς τα $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ και $\mathbf{k}$.

46. Να είναι κάθετο στην ευθεία $x = 2t - 1, y = -t - 1, z = t + 2$, και στο διάνυσμα $\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

47. Να σχηματίζει γωνία 30° με το $\mathbf{i}$ και ίσες γωνίες με τα $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$.

48. Δύο δίπολα βρίσκονται σε απόσταση r το ένα από το άλλο. (Τα *δίπολα* είναι εξιδανικευμένοι μικροί μαγνήτες που ο βόρειος και ο νότιος πόλος τους απέχουν απειροστή απόσταση· η ισχύς ενός διπόλου περιγράφεται από ένα διάνυσμα που λέγεται *διπολική ροπή*). Η ενέργεια μαγνητικού δυναμικού P δίνεται από την $P = -\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{B}_2$ (που λέγεται *δυναμικό αλληλεπίδρασης διπόλου με δίπολο*), όπου το πρώτο δίπολο έχει ροπή $\mathbf{m}_1$ στο εξωτερικό πεδίο $\mathbf{B}_2$ του δευτέρου διπόλου. Σε μονάδες MKS,

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0 \frac{-\mathbf{m}_2 + 3(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{l})\mathbf{l}}{4\pi r^3},$$

όπου $\mathbf{l}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, και μ_0 μια βαθμωτή σταθερά.

(a) Δείξτε ότι

$$P = \mu_0 \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 - 3(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{l})(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{l})}{4\pi r^3}.$$

(b) Βρείτε την P όταν τα $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ είναι κάθετα.

49. Μια σφαίρα με ακτίνα 10 cm και κέντρο το (0, 0, 0) στρέφεται γύρω από τον άξονα z με γωνιακή ταχύτητα 4 και με τέτοια διεύθυνση ώστε η στροφή να έχει φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, ιδωμένη από τον θετικό ημιάξονα z.

(a) Βρείτε το διάνυσμα στροφής $\boldsymbol{\omega}$ (δείτε την Άσκηση 32, Παράγραφος 1.3).

(b) Βρείτε την ταχύτητα $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, όπου το $\mathbf{r} = 5\sqrt{2}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$ είναι στον "ισημερινό".